Soluzioni fac-simile appello scritto

Esercizio 1 (7 punti)
Verificare che il seguente campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(2x\cos(xy) - (x^2y + y^3)\sin(xy), 2y\cos(xy) - (x^3 + xy^2)\sin(xy)\Big)$$

è irrotazionale e calcolarne un potenziale.
Calcolare infine il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ parametrizzata da $\alpha(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$
Soluzione:

Dobbiamo verificare che $\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x = 0$. Infatti abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y = \frac{\partial}{\partial y}F_x = -(3x^2 + 3y^2)\sin(xy) - (x^3y + y^3x)\cos(xy)$$

Il potenziale associato a tale campo conservativo è

$$U(x,y) = (x^2 + y^2)\cos(xy) + cost.$$

Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ è dato da:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dr = U(\alpha(\pi/2)) - U(\alpha(0)) = U(0,3) - U(2,0) = 9 - 4 = 5.$$

Esercizio 2 (7 punti)
Determinare le coordinate (x_G, y_G) del baricentro della regione

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \mid 0 \le y \le 2 + \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\Big\}$$

Soluzione:

$$M = \int\int_D 1 dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2+\sin x} dy\, dx = \int_0^{\pi/2}(2 + \sin x)dx = \pi + 1$$

$$x_G = \frac{1}{M}\int\int_D x dxdy = \frac{1}{\pi+1}\int_0^{\pi/2} x(2 + \sin x)dx = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 1}{\pi + 1}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int\int_D y dxdy = \frac{1}{\pi+1}\int_0^{\pi/2}\frac{(2+\sin x)^2}{2}dx = \frac{1}{2(\pi+1)}\left(\frac{9\pi}{4} + 4\right).$$

Esercizio 3 (8 punti) Si consideri la superfice Σ del toro, ottenuta dalla rotazione attorno all'asse z della circonferenza nel piano yz di equazione $(x-3)^2 + z^2 = 1$

a Si calcoli l'integrale di superficie $\int\int_\Sigma f dS$ della funzione $f(x,y,z) = 1 + z$

b Si calcoli il flusso uscente $\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, 0, x^2 + y^2)$.

Soluzione:

La superficie Σ può essere parametrizzata come

$$r(\phi,\theta) = (-\sin\phi(3 + \cos\theta), \cos\phi(3 + \cos\theta), \sin\theta)\,, \qquad (\phi.\theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

I due vettori tangenti alla superficie Σ sono:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} r(\phi, \theta) = (-\cos\phi(3+\cos\theta), -\sin\phi(3+\cos\theta), 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} r(\phi, \theta) = (\sin\phi\sin\theta, -\cos\phi\sin\theta), \cos\theta)$$

mentre il vettore normale $N(\phi, \theta) = \frac{\partial}{\partial \phi} r \wedge \frac{\partial}{\partial \theta} r$ è

$$N(\phi, \theta) = (3+\cos\theta)(-\sin\phi\cos\theta, \cos\phi\cos\theta, \sin\theta)$$

e $\|N(\phi, \theta)\| = (3+\cos\theta)$. Quindi

$$\int\int_{\Sigma} f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+\sin\theta)(3+\cos\theta) d\phi d\theta = 12\pi^2$$

Per calcolare il flusso uscente dalla superficie Σ del campo vettoriale $\mathbf{F}$, dato che Σ è una superficie chiusa, bordo di una regione Ω (il toro), abbiamo che

$$\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz$$

dato che $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ l'integrale al secondo membro è identicamente nullo e quindi $\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = 0$.
Esercizio 4 (8 punti)
Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = -x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy$ nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$.
Soluzione:

Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari interni a D, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ -2\sqrt{3}x + 2y = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è il punto (0,0), che appartiene al bordo dell'insieme D e in cui la funzione vale $f(0, 0) = 0$.
Analizziamo ora il bordo dell'insieme D composto da tre parti:

1. l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0$,
2. il segmento $y = 0$, $x \in [0, 1]$,
3. il segmento $y = 0$, $y \in [0, 1]$.

Analizziamo separatamente ogni parte.

1. l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0$. Parametrizziamo tale arco con $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$. La funzione f ristretta a tale curva è data da:

   $$f(\alpha(t)) = \sin^2(t) - \cos^2(t) - 2\sqrt{3}\cos t \sin t = -\cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t)$$

   Cerchiamo i valori di $t \in [0, \pi/2]$ tali che $\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$, ovvero

   $$2\sin(2t) - 2\sqrt{3}\cos(2t) = 0$$

   otteniamo $\tan(2t) = \sqrt{3}$, ovvero $2t = \pi/3 + k\pi$, quindi $t = \pi/6 + k\pi/2$. L'unica soluzione contentuta nell'intervallo $[0, \pi/2]$ è $t = \pi/6$ in cui f vale $f(\alpha(\pi/6)) = -1/2 - 3/2 = -2$. Nei punti del bordo dell'arco di circonferenza abbiamo $f(1, 0) = -1$ e $f(0, 1) = 1$.

2. il segmento $y = 0$, $x \in [0,1]$. Parametrizziamo tale segmento con $\alpha(t) = (t,0)$, $t \in [0,1]$. La funzione f ristretta a tale curva è data da $f(\alpha(t)) = -t^2$, che è una funzione decrescente sull'intervallo [0,1], quidi il valore massimo si ottiene per $t = 0$ in cui f vale $f(0,0) = 0$, mentre il valore minimo si ottiene per $t = 1$ in cui f vale $f(1,0) = -1$.

3. il segmento $y = 0$, $y \in [0,1]$. Parametrizziamo tale segmento con $\alpha(t) = (0,t)$, $t \in [0,1]$. La funzione f ristretta a tale curva è data da $f(\alpha(t)) = t^2$, che è una funzione crescente sull'intervallo [0,1], quidi il valore massimo si ottiene per $t = 1$ in cui f vale $f(0,1) = 1$, mentre il valore minimo si ottiene per $t = 0$ in cui f vale $f(0,0) = 0$.

Concludendo il minimo assoluto di f in D è -2, raggiunto nel punto $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, mentre il massimo assoluto di f in D è 1, raggiunto nel punto $(0,1)$.