Campi, lavoro e potenziali

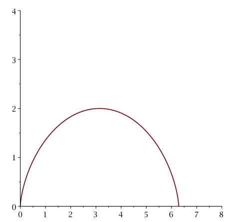
1. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$$
Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ parametrizzata da
$$\alpha(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

2. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}.$$
Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ parametrizzata da
$$\alpha(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

3. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dato da
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}.$$
Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la linea retta congiungente i punti (1,1,1) e (1,0,0)

4. Dopo aver verificato che sono irrotazionali (e definiti su un insieme semplicemente connesso di $\mathbb{R}^3$), calcolare il potenziale associato ai seguenti campi vettoriali
   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$
   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + e^x)\mathbf{i} + (x + z + 4y^3)\mathbf{j} + (y - \sin(z))\mathbf{k}$
   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + e^y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + xe^y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3}{2}\sqrt{z}\right)\mathbf{k}$
   (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz\cos(xyz)+e^x(y^2+z), xz\cos(xyz)+2ye^x, xy\cos(xyz)+e^x)$

5. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da
$$\mathbf{F}(x, y) = (4x - \alpha y)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$$
è conservativo? per tale valore di α calcolare un potenziale.



la cicloide, curva di equazione parametrica $x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$

6. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

   (a) Verificare che $rot\mathbf{F}(x,y) = (0,0)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la circonferenza γ di centro (0,0) e raggio 1

   (c) Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo? Motivare la risposta

7. Utilizzando la formula di Gauss-Green nel piano, calcolare $\int_\gamma F \cdot dr$, dove $F(x,y) = (y^2, x)$ e γ è il perimetro del quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1) percorso in senso antiorario.

8. Utilizzando la formula di Gauss-Green nel piano, calcolare l'area racchiusa dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

9. Utilizzando la formula di Gauss-Green nel piano, calcolare l'integrale $\int\int_D f(x,y)dxdy$, dove $f(x,y) = y$ e D è il sottoinsieme di R^2 dall'arco di cicloide di equazione parametrica $x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$ e dal segmento di estremi $(0,0)$, $(2\pi, 0)$.

Soluzioni

1. Il campo F non è conservativo, infatti $\frac{\partial F_x}{\partial z} \neq \frac{\partial F_z}{\partial x}$, quindi per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è necessario calcolare l'integrale di linea di seconda specie $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds$ dato da

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((2\cos(t) + \sqrt{2}\sin(t))\mathbf{j} + (2\cos(t) + \sqrt{2}\sin(t))\mathbf{k}) \cdot \end{aligned}$$

$$(-2\sin(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos(t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos(t)\mathbf{k})dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 4\cos(t)(\sqrt{2}\cos(t) + \sin(t))dt = 4\sqrt{2}\pi$$

2. Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, infatti si verifica facilmente che $rot\mathbf{F} = (0,0,0)$. La curva γ è chisa, infatti $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (2,0,0)$, quindi, senza dover calcolare un potenziale U, possiamo concludere che $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = 0$

3. Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, infatti si verifica facilmente che $rot\mathbf{F} = (0,0,0)$. Il potenziale U associato al campo $\mathbf{F}$ è dato da $U(x,y,z) = x^2/2 + xz - y^2/2 - yz + k$, dove k è una costante arbitraria. Il lavoro di f lungo una qualsiasi curva congiungente i punti (1,1,1) e (1,0,0) è dato da $U(1,1,1) - U(1,0,0) = k - 1/2 - k = -1/2$

4. (a) $U(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + k$
   (b) $U(x,y,z) = xy + yz + \cos(z) + e^x + y^4 + k$
   (c) $U(x,y,z) = \log(x^2+y^2+z^2) + xe^y + z^{3/2}$
   (d) $U(x,y,z) = \sin(xyz) + e^x(y^2+z)$

5. Il campo $\mathbf{F}$ è definito su tutto il piano $\mathbb{R}^2$, quindi su un insieme semplicemente connesso. IL rotore di $\mathbf{F}$ è il vettore

$$rot\mathbf{F} = (-5+\alpha)\mathbf{k}$$

Il campo è irrotazionale, quindi conservativo, se $(\alpha - 5) = 0$, ovvero $\alpha = 5$. Il campo $\mathbf{F}$ diviene

$$\mathbf{F}(x,y) = (4x - 5y)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$$

Il potenziale $U(x,y)$ è dato da: $U(x,y) = 2x^2 - 5xy + \frac{3}{2}y^2 + k$, dove k è una costante arbitraria.

6. (a) $\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$
   (b) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dr = 2\pi$
   (c) Il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo perché il suo lavoro lungo la curva chiusa γ è non nullo. Questo non è in contrasto con il fatto che rot $\mathbf{F}$ =(0,0) sull'insieme di definizione del campo $\mathbf{F}$, in quanto tale insieme non è semplicemente connesso.

7. Utilizzando la formula di Gauss-Green:

$$\oint \gamma F \cdot dr = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} (1-2y)dxdy = 0$$

8. Parametrizziamo il bordo dell'ellisse tramite $\alpha(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Utilizziamo la formula di Gauss-Green $A(D) = \int\int_D 1dxdy = \oint_\gamma F\cdot dr$, dove $F(x,y) = (-y/2, x/2)$. Abbiamo dunque:

$$A(D) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{b\sin\theta}{2}, \frac{a\cos\theta}{2}\right) \cdot (-a\sin\theta, b\cos\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}d\theta = ab\pi$$

9. Se consideriamo il campo vettoriale $F(x,y) = (-y^2/2, 0)$, per la formula di Gauss Green abbiamo $\int\int_D ydxdy = \oint_{\partial^+D} F\cdot dr$, dove D è la regione piana racchiusa dall'arco di cicloide e dall'asse delle x e ∂^+D è la sua frontiera percorsa in senso antiorario. ∂^+D è composta dal segmento γ_1 congiungente $(0,0)$ con $(2\pi,0)$, e dall'arco di cicloide γ_2 percorsa dal punto $(2\pi,0)$ al punto $(0,0)$. Abbiamo dunque

$$\oint_{\partial^+D} F\cdot dr = \int_{\gamma_1} F\cdot dr + \int_{\gamma_2} F\cdot dr$$

sul segmento γ_1 abbiamo:

$$\int_{\gamma_1} F\cdot dr = \int_0^{2\pi} F(x,0)\cdot(1,0)dx = 0$$

Mentre sull'arco γ_2, tenendo conto del fatto che la parametrizzazione $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ descrive la curva con il verso di percorrenza orario, abbiamo

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dr = -\int_0^{2\pi} F(t-\sin t, 1-\cos t)\cdot(1-\cos t, \sin t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos t)^3}{2}dt = \frac{5\pi}{2}$$

Concludendo

$$\int\int_D ydxdy = \oint_{\partial^+D} F\cdot dr = \frac{5\pi}{2}$$