Campi, lavoro e potenziali

1. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dato da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

2. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dato da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

3. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dato da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la linea retta congiungente i punti (1,1,1) e (1,0,0)

4. Calcolare il potenziale associato ai seguenti campi vettoriali

   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$

   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + e^x)\mathbf{i} + (x + z + 4y^3)\mathbf{j} + (y - \sin(z))\mathbf{k}$

   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + e^y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + xe^y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3}{2}\sqrt{z}\right)\mathbf{k}$

5. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$\mathbf{F}(x, y) = (4x - \alpha y)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$$

è conservativo? per tale valore di α calcolare un potenziale.

Soluzioni

1. Il campo F non è conservativo, infatti $\frac{\partial F_x}{\partial z} \neq \frac{\partial F_z}{\partial x}$, quindi per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è necessario calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds$ dato da

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} ((2\cos(t) + \sqrt{2}\sin(t))\mathbf{j} + (2\cos(t) + \sqrt{2}\sin(t))\mathbf{k}) \cdot \\
&\quad (-2\sin(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos(t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos(t)\mathbf{k}) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos(t)(\sqrt{2}\cos(t) + \sin(t)) dt = 4\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

2. Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, infatti è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso e si verifica facilmente che

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} F_x(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} F_z(x, y, z).$$

La curva γ è chiusa, infatti $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (2, 0, 0)$, quindi, senza dover calcolare un potenziale U, possiamo concludere che $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds = 0$

3. Il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, infatti è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso e si verifica facilmente che

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} F_x(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} F_z(x, y, z).$$

Il potenziale U associato al campo $\mathbf{F}$ è dato da $U(x, y, z) = x^2/2 + xz - y^2/2 - yz + k$, dove k è una costante arbitraria. Il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una qualsiasi curva congiungente i punti (1,1,1) e (1,0,0) è dato da $U(1, 1, 1) - U(1, 0, 0) = k - 1/2 - k = -1/2$

4. (a) $U(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + k$
   (b) $U(x, y, z) = xy + yz + \cos(z) + e^x + y^4 + k$
   (c) $U(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2) + xe^y + z^{3/2}$

5. Il campo $\mathbf{F}$ è definito su tutto il piano $\mathbb{R}^2$, quindi su un insieme semplicemente connesso. Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}F_x(x, y) = -5 + \alpha$$

Il campo è quindi conservativo se $(\alpha - 5) = 0$, ovvero $\alpha = 5$. Il campo $\mathbf{F}$ diviene

$$\mathbf{F}(x, y) = (4x - 5y)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$$

Il potenziale $U(x, y)$ è dato da: $U(x, y) = 2x^2 - 5xy + \frac{3}{2}y^2 + k$, dove k è una costante arbitraria.