

Esercizi su curve e integrali di linea

1. Si calcoli la lunghezza delle seguenti curve:

$$\alpha_1(t) = (\cos(t) + t \sin(t), \sin t - t \cos t) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

$$\alpha_2(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \quad t \in [0, 3]$$

2. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

3. Si calcoli la lunghezza della curva piana, grafico della funzione $y = \cosh(x)$, con $x \in [0, 5]$.

4. Si calcoli l'integrale di linea (di prima specie) $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

$$\text{e } f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$$

5. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante

6. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -y, 2x)$$

e γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \quad t \in [0, 1]$$

7. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

e γ è l'arco di spirale parametrizzato da

$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

8. Si calcolino versore tangente, versore normale, versore binormale, curvatura e torsione della curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = ((2 + \cos t) \sin t, (2 + \cos t) \cos t, \sin t)$$

nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$. Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.

9. Si calcoli, punto per punto, la curvatura dell'ellisse di semiassi 2 e 5, parametrizzata da

$$\alpha(\theta) = (2 \cos \theta, 5 \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzioni

1. $l_1 = \pi^2, l_2 = 5$
2. $l = e^{2\pi} - 1$
3. $l = \sinh 5$.
4. $\int_{\gamma} f ds = \sqrt{2}\pi/8$
5. $x_G = 2/5, y_G = 0$
6. $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5/4$,
7. $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 8\pi^3/3$,
8. $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2, 0), \mathbf{N}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{205}}(-12, 6, -5), \mathbf{B}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{41}}(2, -1, -6),$
 $k(\pi/2) = \frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{5}}, \tau(\pi/2) = 6/41$. Il raggio del cerchio osculatore è $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{41}}$, mentre le coordinate del centro sono

$$(x_C, y_C, z_C) = (2, 0, 1) + \frac{5}{41}(-12, 6, -5)$$

9. $k(\theta) = \frac{10}{(\sqrt{4 \sin^2 \theta + 25 \cos^2 \theta})^3}$