Primi esercizi su curve e integrali di linea

1. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

2. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, x \geq 1\}$$

3. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

   (a) l'ellisse $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

   (b) $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$

   (c) $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1, y \geq x\}$

   (d) la retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione dei piani $z = 2x + y$ e $z = -x + 3y$

   (e) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + y + z = 0$ con la superficie $x^2 + y = 0$

   (f) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $z = 1$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

   (g) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4. Si consideri la curva piana $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ descritta in forma forma parametrica dalla mappa $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$:

$$\alpha(\theta) = \big((\cos\theta)^2, \cos\theta \sin\theta\big), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

   - Calcolare la lunghezza di γ.
   - Descrivere e rappresentare graficamente la curva γ
   - la funzione α è iniettiva? Motivare la risposta.

5. Si calcoli la lunghezza della curva piana, grafico della funzione $y = \cosh(x)$, con $x \in [0, 5]$.

6. Si calcoli la lunghezza della curva γ, parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \qquad t \in [0, 3]$$

7. Si calcoli la lunghezza della curva γ, parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

8. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

9. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

10. Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t, t\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

11. Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$

12. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.