Esercizi su curve e integrali di linea

1. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|, x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

2. Si fornisca una parametrizzazione per la curva intersezione fra la superficie di equazione $y = x^2$ e la superficie di equazione $3z = 2xy$ dal punto (0,0,0) al punto (2,4,16/3)

3. Si calcoli la lunghezza delle seguenti curve:

$$\alpha_1(t) = (\,\cos(t) + t\sin(t), \sin t - t\cos t) \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

$$\alpha_2(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \qquad t \in [0, 3]$$

4. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

5. Si calcoli la lunghezza della curva piana, grafico della funzione $y = \cosh(x)$, con $x \in [0, 5]$.

6. Si calcoli l'integrale di linea (di prima specie) $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\Big) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

   e $f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$

7. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos\theta)\cos\theta, (1 + \cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

   nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante

8. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -y, 2x)$$

   e γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \qquad t \in [0, 1]$$

9. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$
e γ è l'arco di spirale parametrizzato da
$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

10. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y^2, x^3y)$$
e γ è il perimetro del quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1),(0,1).

11. Si calcolino versore tangente, versore normale, versore binormale, curvatura e torsione della durva γ parametrizzata da
$$\alpha(t) = ((2 + \cos t) \sin t, (2 + \cos t) \cos t, \sin t)$$
nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$. Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.

12. Si calcoli, punto per punto, la curvatura dell'ellisse di semiassi 2 e 5, parametrizzata da
$$\alpha(\theta) = (2 \cos \theta, 5 \sin \theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzioni

1. $\alpha_1(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$.
   $\alpha_2(t) = (t, -\sqrt{4 - t^2})$, $t \in [-2, 2]$

2. $\alpha(t) = (t, t^2, 2t^3/3)$, $t \in [0, 2]$

3. $l_1 = \pi^2$, $l_2 = 5$

4. $l = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$

5. $l = \sinh 5$.

6. $\int_\gamma f ds = \sqrt{2}\pi/8$

7. $x_G = 2/5$ $y_G = 0$

8. $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 5/4$,

9. $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 8\pi^3/3$,

10. $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1/6$

11. $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2,0)$, $\mathbf{N}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{205}}(-12,6,-5)$, $\mathbf{B}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{41}}(2,-1,-6)$, $k(\pi/2) = \frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{5}}$, $\tau(\pi/2) = 6/41$. Il raggio del cerchio osculatore è $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{41}}$, mentre le coordinate del centro sono

$$(x_C, y_C, z_C) = (2,0,1) + \frac{5}{41}(-12,6,-5)$$

12. $k(\theta) = \frac{10}{\left(\sqrt{4\sin^2\theta + 25\cos^2\theta}\right)^3}$