

### Esercizi su curve e integrali di linea

1. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \leq 0\}$$

2. Si forniscano almeno due parametrizzazioni per la semicirconferenza

$$\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1, x \geq 1\}$$

3. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

(a) l'ellisse  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

(b)  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$

(c)  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq x\}$

(d) la retta in  $\mathbb{R}^3$  intersezione dei piani  $z = 2x + y$  e  $z = -x + 3y$

(e) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $x + y + z = 0$  con la superficie  $x^2 + y = 0$

(f) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $z = 1$  con la superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(g) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $x + z = 0$  con la superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

4. Si calcoli la lunghezza della curva piana, grafico della funzione  $y = \cosh(x)$ , con  $x \in [0, 5]$ .

5. Si calcoli la lunghezza della curva  $\gamma$ , parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, t^2/3, 2t^3/27) \quad t \in [0, 3]$$

6. Si calcoli la lunghezza della curva  $\gamma$ , parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

7. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = (e^\theta \cos \theta, e^\theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

8. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

9. Si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f ds$ , dove  $\gamma$  è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

$$\text{e } f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

10. Si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f ds$ , dove  $\gamma$  è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

$$\text{e } f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$$

11. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.

12. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{F}$  è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -y, 2x)$$

e  $\gamma$  è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3) \quad t \in [0, 1]$$

13. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{F}$  è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

e  $\gamma$  è l'arco di spirale parametrizzato da

$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

14. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{F}$  è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^2, x^3 y)$$

e  $\gamma$  è il perimetro del quadrato di vertici  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$ .

15. Si calcoli, punto per punto, la curvatura dell'ellisse di semiassi 2 e 5, parametrizzata da

$$\alpha(\theta) = (2 \cos \theta, 5 \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

16. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

17. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura della curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\alpha(t) = ((2 + \cos t) \sin t, (2 + \cos t) \cos t, \sin t)$$

nel punto corrispondente al valore di  $t = \pi/2$ . Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.

18. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto dell'arco di spirale di Archimede, parametrizzato da:

$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

19. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva grafico della funzione  $y = \cosh x$ .