Esercitazioni del 11 marzo 2013

Ricerca della parametrizzazione di una curva γ in $\mathbb{R}^3$

Esercizio 1

Fornire una parametrizzazione per l'arco di curva γ appartenente alla superficie di equazione $z = \sqrt{2y^2 - x}$ che ha come proiezione sul piano xy la curva di equazione $x = y^2$, con $y \in [-1, 1]$. Si specifichi poi se γ è regolare.

Soluzione: Indichiamo con $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione cercata. La funzione α avrà la forma

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in [t_0, t_1]$$

descrivendo le coordinate dei punti della curva γ al variare del parametro t.
La condizione di appartenenza di γ alla superficie di equazione $z = \sqrt{2y^2 - x}$ si traduce nella seguente relazione fra la funzione $t \mapsto z(t)$ e le funzioni $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$:

$$z(t) = \sqrt{2y(t)^2 - x(t)}, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1}$$

In altre parole, una volta che abbiamo determinato le funzioni $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$, allora abbiamo anche la funzione $t \mapsto z(t)$.
Sfuttiamo ora la seconda informazione, ovvero la conoscenza della proiezione di γ sul piano xy. Se indichiamo con $\tilde{\gamma}$ tale curva, e se $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ è la parametrizzazione di γ, allora $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ sarà la parametrizzazione di $\tilde{\gamma}$. Ora tale curva è la parabola di equazione $x = y^2$, con $y \in [-1, 1]$, che può essere parametrizzata nel seguente modo:

$$t \mapsto (t^2, t, 0), \qquad t \in [-1, 1].$$

Possiamo quindi concludere che $x(t) = t^2$, $y(t) = t$ e, dalla relazione (1), $z(t) = \sqrt{2y(t)^2 - x(t)} = |t|$. La parametrizzazione di γ ottenuta è dunque:

$$\alpha(t) = (t^2, t, |t|), \qquad t \in [-1, 1].$$

Verifichiamo ora se α è una parametrizzazione regolare, ovvero se α è continua e derivabile, ed inoltre se α' è una funzione continua tale che $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [-1, 1]$.
Possiamo subito dire che $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ è una funzione continua in quanto le sue componenti

$$t \mapsto x(t) = t^2, \quad t \mapsto y(t) = t, \quad t \mapsto z(t) = |t|$$

sono funzioni continue. Verifichiamo ora la derivabilità .
Se $t < 0$, allora $\alpha(t) = (t^2, t, -t)$ e quindi, per $t \in (-1, 0)$, abbiamo che $\alpha'(t) = (2t, 1, -1)$.
Se $t > 0$, allora $\alpha(t) = (t^2, t, t)$ e quindi, per $t \in (0, 1)$, abbiamo che $\alpha'(t) = (2t, 1, 1)$.
Per $t = 0$ calcoliamo direttamente $\alpha'(0)$ come limite (se esiste) del rapporto incrementale:

$$\alpha'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h) - \alpha(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2, h, |h|)}{h} = \lim_{h\to 0}(h, 1, \frac{|h|}{h})$$

Dato che

$$\lim_{h\to 0^+}(h, 1, \frac{|h|}{h}) = (0, 1, 1),$$

mentre

$$\lim_{h\to 0^-}(h, 1, \frac{|h|}{h}) = (0, 1, -1),$$

dal fatto che limite destro e limite sinistro non coincidono, possiamo dedurre che non esiste $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h}$ e quindi α non è derivabile in 0.

Alcune riflessioni per capire meglio:

- Provate a capire come è fatta la superficie $z = \sqrt{2y^2 - x}$, ovvero il grafico della funzione $f(x, y) = \sqrt{2y^2 - x}$. Qual'è il dominio (=l'insieme di definizione) di tale funzione?.
- Provate a disegnare la curva γ, parametrizzata da $\alpha(t) = (t^2, t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$. In particolare cercate di descrivere il suo comportamento nelle vicinanze di $t = 0$.

Esercizio 2

Calcolare la lunghezza della curva γ intersezione delle superfici $y = x^2$ e $3z = 2xy$ dal punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 4, 16/3)$.

Soluzione: Indichiamo con $\alpha : [t_0, t_1] \in \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione cercata. La funzione α avrà la forma

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)), \qquad t \in [t_0, t_1]$$

La condizione di appartenenza di γ alla superficie di equazione $y = x^2$ si traduce nella seguente relazione fra la funzione $t \mapsto x(t)$ e la funzione $t \mapsto y(t)$:

$$y(t) = x(t)^2, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{2}$$

La condizione di appartenenza di γ alla superficie di equazione $3z = 2xy$ si traduce nella seguente relazione fra la funzione $t \mapsto z(t)$ e le funzione $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$:

$$z(t) = \frac{2}{3}x(t)y(t), \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{3}$$

La relazione (2) ci permette di determinare la forma della funzione $t \mapsto y(t)$, nota quella della funzione $t \mapsto x(t)$, mentre la relazione (3) ci permette di determinare la forma della funzione $t \mapsto z(t)$, nota quella delle funzioni $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$.
Scegliamo ora di parametrizzare il punti di γ in funzione della loro coordinata x, ovvero di porre $t = x$. Abbiamo quindi

$$x(t) = t, \qquad y(t) = t^2, \qquad z(t) = \frac{2}{3}t^3,$$

e la parametrizzazione di γ ottenuta è :

$$\alpha(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right) \qquad t \in [t_0, t_1].$$

L'intervallo di variazione del parametro t può essere determinato imponendo che il punto iniziale sia $(0, 0, 0)$:

$$\alpha(t_0) = (0, 0, 0), \quad \Rightarrow t_0 = 0,$$

e il punto finale sia $(2, 4, 16/3)$:

$$\alpha(t_1) = (2, 4, 16/3), \quad \Rightarrow t_1 = 2.$$

In conclusione

$$\alpha(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right) \qquad t \in [0, 2]..$$

La lunghezza dell'arco di curva γ è dato da

$$L(\gamma) = \int_0^2 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^2 (1 + 2t^2) dt = \frac{22}{3}$$

Alcune riflessioni per capire meglio:

- Cercate di disegnare la superficie di equazione $y = x^2$, la superficie $3z = 2xy$ e la curva γ.

Parametro d'arco

Consideriamo un arco di curva regolare γ e sia $\alpha : [t_0, t_1] \in \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione regolare. Fissiamo il punto iniziale $P_0 \equiv \alpha(t_0)$ di γ e, al variare del parametro t, calcoliamo la lunghezza dell'arco di curva che ha come primo estremo P_0 e come secondo estremo $\alpha(t)$, indicando con $s(t)$ tale valore:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du \tag{4}$$

La funzione $t \mapsto s(t)$ definita dall'equazione (4) è continua e derivabile. In particolare, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\frac{d}{dt} s(t) = \|\alpha'(t)\|$$

In alcuni casi può essere utile parametrizzare un arco di curva regolare γ in funzione del parametro d'arco s, ovvere descrivere le coordinate dei punti della curva in funzione della distanza dal punto iniziale, ovvero tramite una funzione

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), \qquad s \in [0, L],$$

dove L indica la lunghezza totale della curva.

Alcune riflessioni per capire meglio:

- Se $\alpha : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ rappresenta la legge oraria di un punto materiale, cosa rappresentano γ, $s(t)$, $\alpha'(t)$ e $\|\alpha'(t)\|$?

Esempio 1

Circonferenza nel piano di centro $(0, 0)$ e raggio R.
Solitamente tale curva viene parametrizzata utilizzando come parametro t la variabile angolare delle coordinate polari nel piano:

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Il punto iniziale della curva è $\alpha(0) = (1, 0)$. La lunghezza dell'arco $s(t)$ che ha come primo estremo $(1, 0)$ e come secondo estremo il punto $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ è data da:

$$s(t) = \int_0^t R du = Rt.$$

In questo caso la dipendenza di $s(t)$ dalla variabile t è lineare e quindi è immediato invertirla, esplicitando la dipendenza del parametro t da s:

$$s(t) = Rt, \qquad t(s) = s/R.$$

La parametrizzazione di γ in funzione del parametro d'arco s è quindi:

$$\alpha(s) = (R \cos t(s), R \sin t(s)) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R)), \qquad s \in [0, 2\pi R].$$

Esempio 2. Elica cilindrica

Consideriamo la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, ht), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Il punto iniziale della curva è $\alpha(0) = (1, 0, 0)$. La lunghezza dell'arco $s(t)$ che ha come primo estremo $(1, 0, 0)$ e come secondo estremo il punto $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)$ è data da:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{R^2 + h^2} du = \sqrt{R^2 + h^2} t.$$

Anche in questo caso la dipendenza di $s(t)$ dalla variabile t è lineare e quindi è immediato invertirla, esplicitando la dipendenza del parametro t da s:

$$s(t) = \sqrt{R^2 + h^2} t, \qquad t(s) = s/\sqrt{R^2 + h^2}.$$

La parametrizzazione di γ in funzione del parametro d'arco s è quindi:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (R\cos t(s), R\sin t(s), ht(s)) \\ &= \left(R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \frac{hs}{\sqrt{R^2+h^2}}\right), \qquad s \in [0, 2\pi\sqrt{R^2+h^2}] \end{aligned}$$

Alcune riflessioni per capire meglio:

- Cercate di disegnare la curva γ, comprendendo il significato geometrico dei parametri R e h.

Esempio 3: Il grafico della funzione $y = \cosh x$

Consideriamo la curva piana parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), \qquad t \in [0, 1]$$

Il punto iniziale della curva è $\alpha(0) = (0, 1)$. La lunghezza dell'arco $s(t)$ che ha come primo estremo $(0, 1)$ e come secondo estremo il punto $\alpha(t) = (t, \cosh t)$ è data da:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1 + (\sinh u)^2} du = \int_0^t \cosh u \, du = \sinh t.$$

In questo caso la dipendenza di $s(t)$ dalla variabile t è data da

$$s(t) = \sinh t$$

Tale relazione può essere invertita utilizzando la funzione inversa del seno iperbolico:

$$t(s) = \operatorname{arcsinh}(s) = \log(s + \sqrt{s^2 + 1})$$

La parametrizzazione di γ in funzione del parametro d'arco s è quindi:

$$\alpha(s) = (\log(s + \sqrt{s^2 + 1}), \sqrt{s^2 + 1}), \qquad s \in [0, \sinh 1].$$

Alcune riflessioni per capire meglio:

- Disegnate la curva γ
- Per alcuni valori della variabile t, calcolate il valore $s(t)$.