Esercitazioni del 11 aprile 2013

Rette e piani nello spazio

Si determinini in quale punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con

$$f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2 - 2x + 5y$$

il piano tangente è ortogonale alla retta congiungente l'origine $(0, 0, 0)$ con il punto di coordinate $(-3, 8, -1)$.

Il vettore che dà la direzione della retta congiungente l'origine $(0, 0, 0)$ con il punto di coordinate $(-3, 8, -1)$ è il vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1) - (0, 0, 0) = (-3, 8, -1)$. Il piano tangente al grafico della funzione f nel punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \tag{1}$$

Ricordiamo che l'equazione di un piano ortogonale ad un vettore $\mathbf{N} = (a, b, c)$ è :

$$ax + by + cz = d$$

D'altra parte l'equazione (1) può essere scritta come:

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y + z = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 \tag{2}$$

Questa forma mette in evidenza che il piano è ortogonale al vettore

$$\Big(- \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\Big)$$

L'ortogonalità fra il piano descritto dall'equazione (2) e la retta diretta nella direzione del vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1)$ si ottiene se il vettore $\Big(- \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, 1\Big)$ è proporzionale al vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1)$, quindi se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\Big(- \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\Big) = \lambda(-3, 8, -1)$$

ovvero

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -3\lambda$$

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 8\lambda$$
$$1 = -\lambda \tag{3}$$

Dato che

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 10x + 3y - 2$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x + 2y + 5$$

imponiamo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite λ, x_0, y_0:

$$10x_0 + 3y_0 - 2 = 3\lambda$$
$$3x_0 + 2y_0 + 5 = -8\lambda$$
$$1 = -\lambda \tag{4}$$

Quindi:

$$\lambda = -1, \qquad x_0 = -1, \qquad y_0 = 3$$

Derivazione di funzione composta

Si consideri una curva espressa in coordinate polari da una funzione $\alpha : [a, b] \to [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ della forma

$$\alpha(t) = (\rho(t), \theta(t)$$

In altre parole stiamo rappresentando la curva descrivendo la variazione della distanza dall'origine ρ e dell'angolo di inclinazione θ rispetto all'asse x al variare di un parametro t. Ad esempio, se la funzione $\rho(t) = R$ e $\theta(t) = t$, $t \in [0, 2\pi]$ stiamo descrivendo una circonferenza centrata in (0,0) e di raggio R. Se invece ad esempio abbiamo che $\theta(t) = \theta_0$ e $\rho(t) = t$, con $t \in [0, 2]$, allora stiamo descrivendo un segmento di lunghezza 2 inclinato rispetto all'asse delle x di un angolo pari a θ_0.
Il passaggio dalle coordinate polari (ρ, θ) alle coordinate cartesiane (x, y) è dato dalla funzione $\Psi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, data da:

$$(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = \Psi((\rho, \theta)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

La curva espressa quindi in coordinate cartesiane si ottiene componendo la trasformazione Ψ con la funzione α, che descrive la curva in coordinate polari:

$$(x(t), y(t)) = \Psi \circ \alpha(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t))$$

Il vettore tangente può essere calcolato utilizzando la formula di derivazione di funzione composta:

$$\frac{d}{dt}\Psi \circ \alpha(t) = J\Psi(\alpha(t))\alpha'(t)$$

dove $J\Psi$ è la matrice Jacobiana della trasformazione Ψ:

$$J\Psi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

mentre $\alpha'(t)$ è il vettore $(\rho'(t), \theta'(t))$. Abbiamo dunque:

$$\frac{d}{dt}\Psi \circ \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t) \\ \rho'(t)\sin\theta(t) + \rho(t)\theta'(t)\cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

Equazione delle onde

Consideriamo la seguente equazione differenziale alle derivate parziali, detta *equazione delle onde*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = 0 \tag{5}$$

La soluzione f è una funzione di 2 variabili (x,t) di classe C^2 che soddisfa (5). Possiamo pensare a x come ad una variabile spaziale e a t come una variabile temporale, e in tal caso la costante c che appare in (5) ha le dimensioni di una velocità .
L'equazione (5) descrive vari fenomeni di propagazione ondosa classica, tra cui le onde elettromagnetiche e le onde sonore. Per avere un'idea concreta del significato dell'equazione e delle sue soluzioni possiamo pensare ad una corda tesa e omogenea, che a riposo assume una configurazione orizzontale, diretta lungo l'asse delle x. Poniamo l'asse delle y lungo la direzione verticale e indichiamo con $f(x,t)$ la coordinata y, ovvero la deformazione verticale, al tempo t di un punto della corda con ascissa pari a x. La funzione $f(x,t)$ descrive dunque, al variare del tempo, la forma che la corda assume. Si può dimostrare che, nell'ipotesi di piccole deformazioni, la funzione f è soluzione dell'equazione delle onde (5). In tal caso il paramentro c è dato da $c = \sqrt{\tau/\mu}$, dove τ è il modulo della tensione della fune e μ la densità lineare di massa.
Consideriamo ora una generica funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,t) = g(x - ct)$$

É immediato verificare che f è una soluzione di (5), infatti:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = g'(x-ct), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = g''(x-ct),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -cg'(x-ct) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = c^2 g''(x-ct)$$

e quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = 0$$

Tale soluzione descrive un'onde *progressiva*, ovvero un'onda il cui profilo si propaga verso destra con velocità C, infatti

$$f(x,t) = f(x + c\Delta t, t + \Delta t)$$

Per casa: dimostrare che, data una generica funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2, la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,t) = g(x+ct)$ è una soluzione dell'equazione delle onde (5). Qual è il suo significato?