Esercitazioni del 18 marzo 2013

Calcolo della curvatura di un arco di curva regolare γ in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo un arco di curva regolare γ, descritta analiticamente da una parametrizzazione $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, con I intervallo in $\mathbb{R}$:

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Abbiamo visto che per ogni $t \in I$ il vettore $\alpha'(t)$ è tangente alla curva γ nel punto $\alpha(t)$. La conoscenza di $\alpha'(\bar{t})$ permette quindi di scrivere l'equazione della retta tangente a γ in $\alpha(\bar{t})$. In forma parametrica questa è infatti data da

$$r(t) = \alpha(\bar{t}) + t\alpha'(\bar{t}), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esempio

Descrivere la retta tangente alla *spirale di Archimede*, parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t\cos t, t\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

nel punto $\alpha(\pi/2)$.
soluzione: Il punto corrispondente al valore del parametro $t = \pi/2$ ha coordinate $\alpha(\pi/2) = (0, \pi/2)$. Il vettore tangente alla curva è dato da $\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$. In $t = \pi/2$ abbiamo $\alpha'(\pi/2) = (-\pi/2, 1)$. La retta passante per il punto $(0, \pi/2)$ e diretta lungo il vettore $(-\pi/2, 1)$ ha equazione parametrica

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) + t\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2} + t\right), \qquad t \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Versore tangente, versore normale e curvatura

Introduciamo ora un parametro reale positivo che esprime la rapidità con cui varia la direzione della retta tangente.
Il primo passo è la definizione del *versore tangente* alla curva γ nel punto $\alpha(t)$. Viene indicato con $T(t)$ e si calcola dividendo il vettore tangente $\alpha'(t)$ per la sua norma:

$$T(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Per costruzione $T(t)$ è un vettore di norma 1 tangente punto per punto alla curva γ. Notiamo che, per l'ipotesi di regolarità della curva, $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ per ogni t, e quindi

$T(t)$ è sempre ben definito.
Il passo successivo è lo studio della variazione di $T(t)$ lungo la curva, ovvero del vettore $\frac{d}{dt}T(t)$. Tale vettore ha le seguenti caratteristiche:

1. La direzione di $\frac{d}{dt}T(t)$ è sempre ortogonale a quella di $T(t)$, infatti, dato che $\|T(t)\| = 1$ per ogni t abbiamo:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(T(t) \cdot T(t)\right) = 2T(t) \cdot \frac{d}{dt}T(t).$$

   Definiamo *versore normale* alla curva γ nel punto $\alpha(t)$ il vettore di norma 1 con la direzione ed il verso di $\frac{d}{dt}T(t)$. Tale versore, ortogonale a $T(t)$, viene indicato con $N(t)$ ed è dato da

$$N(t) := \frac{\frac{d}{dt}T(t)}{\left\|\frac{d}{dt}T(t)\right\|}$$

2. Per quanto riguarda la norma di $\frac{d}{dt}T(t)$, intuitivamente questa esprimerà la velocità di variazione della direzione della retta tangente. In particolare, se $\|\frac{d}{dt}T(t)\| = 0$ per ogni t, allora la costanza del versore tangente ci dirà che la curva γ è una retta [1]. Viceversa, quanto maggiore sarà $\|\frac{d}{dt}T(t)\|$, tanto maggiore sarà la rapidità con cui γ si allontana dalla sua retta tangente in $\alpha(t)$. Sulla base di queste considerazioni definiamo la *curvatura* di γ nel punto $\alpha(t)$ come il numero reale positivo dato da

$$k(t) := \frac{\left\|\frac{d}{dt}T(t)\right\|}{\|\alpha'(t)\|} \tag{1}$$

Indipendenza dalla parametrizzazione

Il parametro $k(t)$ definito dall'equazione (1) è una caratteristica geometrica della curva γ, nel punto $\alpha(t)$. In altre parole, se parametrizziamo γ con un nuova parametrizzazione $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, il valore della curvatura non cambia. In particolare, se la curva γ viene parametrizzata in funzione del parametro d'arco s:

$$s \mapsto \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)), \qquad s \in [0, L],$$

allora le formule assumono una forma particolarmente semplice che mette in evidenza il significato geometrico del parametro k:

$$T(s) = \alpha'(s), \qquad k(s) = \left\|\frac{d}{ds}T(s)\right\|$$

[1] Provate per esercizio a dimostrare questa affermazione

Raggio di curvatura e cerchio osculatore

Definiamo *raggio di curvatura* il valore $\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$. Tale numero reale positivo rappresenta il raggio del *cerchio osculatore* della curva γ nel punto $\alpha(t)$. Il cerchio passante per $\alpha(t)$ che meglio approssima la curva γ in un intorno di $\alpha(t)$.
Tale cerchio giace sul piano individuato dai versori $T(t)$ e $N(t)$, detto *piano osculatore*. Il centro è il punto C ottenuto partendo dal punto $\alpha(t)$ e muovendosi di una distanza pari a $\rho(t)$ nella direzione del versore $N(t)$:

$$C = \alpha(t) + \rho(t)N(t)$$

Esempio: elica cilindrica

Calcolare punto per punto il versore tangente, il versore normale e la curvatura dell'arco di elica cilindrica parametrizzato da:

$$\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, ht), \qquad t \in R$$

Desfrivere il cerchio osculatore nel punto $\alpha(\pi/2)$.

Soluzione:

$$\alpha'(t) = (-R\sin t, Rcost, h), \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{R^2 + h^2},$$

il versore tangente è dato da:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}(-R\sin t, R\cos t, h)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}(-R\cos t, -R\sin t, 0), \qquad \left\|\frac{d}{dt}T(t)\right\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Il versore normale è quindi dato da:

$$N(t) = \frac{\frac{d}{dt}T(t)}{\left\|\frac{d}{dt}T(t)\right\|} = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

e la curvatura[2] da:

$$K(t) = \frac{\left\|\frac{d}{dt}T(t)\right\|}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{R}{R^2 + h^2}.$$

[2]Riflettete sulla dipendenza di k dai parametri R e h, tenendo conto del loro significato geometrico

Il raggio di curvatura è dato da

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)} = \frac{R^2 + h^2}{R},$$

e, analogamente alla curvatura, non dipende dal parametro t, quindi non varia lungo la curva.
Esercizio per casa: Provate a calcolare il versore tangente, il versore normale e la curvatura dell'arco di elica cilindrica utilizzando la parametrizzazione della curva in funzione del parametro d'arco s, ricavata nelle esercitazioni del 11/3/2013.

Il cerchio osculatore nel punto $\alpha(\pi/2)) = (0, R, h\pi/2)$

1. giace sul piano individuato da $N(\pi/2) = (0, -1, 0)$ e $T(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}(-R, 0, h)$,
2. ha raggio pari a $\rho = \frac{R^2+h^2}{R}$,
3. il centro è il punto

$$C = \alpha(\pi/2)) + \rho N(\pi/2) = (0, -1, 0) + \frac{R^2 + h^2}{R}(0, -1, 0) = (0, -h^2/R, 0).$$

Esercizio per casa: Mostrate che la rappresentazione parametrica per il cerchio osculatore in funzione del parametro d'arco s è la seguente

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= C - \rho\cos(s/\rho)N(\pi/2) + \rho\sin(s/\rho)T(\pi/2) \\
&= (0, -h^2/R, 0) - \frac{R^2 + h^2}{R}\cos\left(\frac{sR}{R^2 + h^2}\right)(0, -1, 0) + \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R}\sin\left(\frac{sR}{R^2 + h^2}\right)(-R, 0, h)
\end{aligned}$$

$s \in [0, 2\pi\rho]$.
Provate a disegnare tale curva.

Analogia cinematica

Se riguardiamo la parametrizzazione $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ della curva γ come la legge oraria del moto di un punto materiale, allora il parametro t viene interpretato come la variabile tempo, mentre il vettore $\alpha(t)$ viene interpretato come il vettore posizione del punto materiale all'istante t. Analogamente $\alpha'(t)$ va interpretato come il vettore velocitaà istantanea $\vec{v}(t)$ e $\alpha''(t)$ come il vettore accellerazione $\vec{a}(t)$. Proviamo a scrivere tali vettori mettendo in evidenza T, N e k. Scriviamo il vettore velocità $\vec{v}(t)$ mettendo in evidenza la sua norma:

$$\alpha'(t) \equiv \vec{v}(t) = \|\vec{v}(t)\| T(t)$$

Il vettore accelerazione quindi è dato da

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(\|\vec{v}(t)\|T(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\|\vec{v}(t)\|\right)T(t) + \|\vec{v}(t)\|\frac{d}{dt}T(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\|\vec{v}(t)\|\right)T(t) + \|\vec{v}(t)\|^2 k(t)N(t)
\end{aligned}$$

Nell'ultima riga si vede come il vettore accellerazione istantanea viene scomposto in 2 componenti: una tangente al moto (diretta lungo il versore T), la componente *tangenziale*, e una ortogonale al moto (diretta lungo il versore N), la componenete *centripeta.* Quest'ultima aumenta all'aumentare della curvatura e del modulo della velocità istantanea. In altre parole, affinché la traiettoria del punto descriva curva γ, è necessaria una forza in grado di produrre, oltre alla componente tangenziale dell'accelerazione, anche quella centripeta. Quest'ultima sarà tanto più grande quanto maggiore sarà la curvatura di γ e la velocità del punto materiale.

Una formula alternativa per il calcolo di k

A volte, per semplificare i calcoli, è utile calcolare la curvatura k utilizzando la seguente formula[3]:

$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Esempio: Calcolare la curvatura della curva γ nel piano xy grafico della funzione $y = x^2$.
Soluzione: Parametrizzaimo γ nel modo seguente

$$\alpha(t) = (t, t^2, 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo allora:

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 0)$$
$$\alpha''(t) = (0, 2, 0)$$
$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, 2)$$
$$K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

Notiamo che $k(t)$ assume il valore massimo per $t = 0$, ovvero nel vertice $(0, 0)$ della parabola $y = x^2$.
Esercizio per casa: Ricavate il versore tangente ed il versore normale in tutti i punti della curva γ.

---

[3] Provate a dimostrarla per esercizio