Esercitazioni del 18 marzo 2013

Integrali di linea di funzioni scalari

Dato un arco di curva regolare γ, parametrizzato da $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, abbiamo imparato nelle lezioni precedenti a calcolare la lunghezza di γ. In particolare la lunghezza dell'arco compreso fra i punti $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_0)$ è data da:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$$

A livello infinitesomo abbiamo la relazione $ds = \|\alpha'(t)\|dt$, che esprime la lunghezza ds di un arco infinitesimo di curva compreso fra i punti $\alpha(t)$ e $\alpha(t+dt)$.

Immaginiamo ora che la curva γ modellizzi un oggetto unidimensionale pesante (ad es. una fune, un filo...) e supponiamo che punto per punto lungo la curva sia definita una funzione ρ *densità lineare di massa*, tale cioè che la massa di una porzione infinitesima di filo di lunghezza ds centrata nel punto di coordinate (x,y,z) è data da

$$dm = \rho(x,y,z)ds.$$

Se descriviamo le coordinate dei punti della curva γ tramite la parametrizzazione α, allora la massa di una porzione infinitesima di filo compresa fra i punti $\alpha(t)$ e $\alpha(t+dt)$ è data da:

$$dm = \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$$

Sommando i contributi di tutti questi archi infinitesimi di curva, otteniamo che la massa totale è data da:

$$M = \int_a^b \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt.$$

Abbiamo così introdotto in maniera intuitiva una particolare particolare procedura di integrazione di una funzione scalare ρ lungo un arco di curva γ, che definiamo ora in maniera rigorosa:

Definizione 1 *Sia γ un arco di curva regolare parametrizzato dalla funzione $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali definita su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^3$ contenente γ. Si dice integrale di linea di f lungo γ e si indica con $\int_\gamma f ds$ l'integrale:*

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$$

L'integrale così definito dipende solo dalla funzione f e dalla curva γ, ma non dalla particolare parametrizzazione $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ della curva γ. In altre parole se $\alpha_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\alpha_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ sono due parametrizzazioni dello stesso arco di curva regolare γ, allora:

$$\int_a^b f(\alpha_1(t))\|\alpha_1'(t)\|dt = \int_c^d f(\alpha_2(t))\|\alpha_2'(t)\|dt$$

É importante far notare che l'ipotesi di regolarià della curva può essere indebolita ed è possibile definire l'integrale di linea di una funzione f lungo una curva γ regolare a tratti, ammettendo quindi i casi in cui le condizioni di regolarità non sono verificate in un numero finito di punti.

Esempio

Determinare la massa del filo la cui forma è descritta da $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, con $t \in [0,1]$, e la densità lineare è data da $\rho(x,y,z) = 1 + x/3$.
Soluzione:

$$\begin{aligned}
M &= \int_\gamma \rho ds = \int_0^1 \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt \\
&= \int_0^1 \rho(3t, 3t^2, 2t^3)\|(3, 6t, 6t^2)\|dt \\
&= \int_0^1 (1+t)3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}dt \\
&= \int_0^1 (1+t)3(1+2t^2)dt = 8
\end{aligned}$$

Calcolo delle coordinate del baricentro di un oggetto unidimensionale

Ripetiamo il ragionamento fatto per impostare il calcolo della massa di un oggetto unidimensionale la cui forma è descritta dalla curva regolare γ parametrizzata da $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e la densità lineare di massa dalla funzione ρ, per il calcolo delle coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro G. Ricordiamo che la massa di una porzione infinitesima compresa fra i punti $\alpha(t)$ e $\alpha(t + dt)$ è data da:

$$dm = \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \rho(x(t), y(t), z(t))\|\alpha'(t)\|dt.$$

Le coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro G saranno calcolate come:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma x\rho ds = \frac{1}{M}\int_a^b x(t)\rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt,$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\int_\gamma y\rho ds = \frac{1}{M}\int_a^b y(t)\rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt, \\ z_G &= \frac{1}{M}\int_\gamma z\rho ds = \frac{1}{M}\int_a^b z(t)\rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt, \end{aligned}$$

Esempio

Determinare la massa e le coordinate del baricentro di un filo a forma di elica cilindrica, parametrizzata da

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

e la densità lineare di massa è data dalla funzione

$$\rho(x, y, z) = z$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} M &= \int_\gamma \rho ds = \int_0^{2\pi} \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt \\ &= \int_0^{2\pi} z(t)\sqrt{2}dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} tdt = 2\sqrt{2}\pi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int_\gamma x\rho ds = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} x(t)\rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}t\cos tdt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\int_\gamma y\rho ds = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} y(t)\rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}t\sin tdt = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M}\int_\gamma z\rho ds = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} z(t)\rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt, \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}t^2dt = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

Esercizio per casa

Calcolate le coordinate (x_G, y_G) di una semicirconferenza omogenea (cioè con densità lineare di massa ρ costante), parametrizzata da

$$\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

(soluzione: $x_G = 0$, $y_G = 2R/\pi$.)

Calcolo del massimo e minimo assoluto di funzioni definite lungo curve

Esercizio 1

Si consideri l'ellisse nel piano xy di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$. Determinare i punti in cui la curvatura è massima e i punti in cui la curvatura è minima.
Soluzione: Per calcolare la curvatura dell'ellisse, dobbiamo parametrizzarla. La parametrizzazione più conveniente è la seguente:

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Riguardando una curva piana come una curva in $\mathbb{R}^3$ che giace sul piano xy, ovvero il piano $z = 0$, possiamo parametrizzare la curva nel modo seguente:

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Possiamo ora applicare la formula $k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, dove

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0), \qquad \alpha''(t) = (-a\cos t, -b\sin t, 0),$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, ab), \qquad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

La curvatura in un punto di coordinate $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$ è quindi data da:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

Vogliamo ora determinare i valori di $t \in [0, 2\pi]$ in cui la funzione $K(t)$ assume il valore massimo e i punti in cui la funzione $K(t)$ assume il valore minimo. Dato che

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{((a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2)^{3/2}}$$

possiamo dire che $k(t)$ assume il valore massimo per t tale che la funzione $(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2$ assume il valore minimo, quindi in $t = 0, \pi$. Viceversa, abbiamo che $k(t)$ assume il valore minimo per t tale che la funzione $(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2$ assume il valore massimo, quindi in $t = \pi/2, 3\pi/2$.
Concludendo, k è massima in $\alpha(0) = (a, 0)$ e in $\alpha(\pi) = (-a, 0)$, dove vale a/b^2, mentre k è minima in $\alpha(\pi/2) = (0, b)$ e in $\alpha(3\pi/2) = (0, -b)$, dove vale b/a^2.

Esercizio 2

Si consideri la curva γ nel piano xy di equazione $x^2 y = 16$, con $x \in [1, 10]$. Si determini il punto di γ più vicino all'origine $O = (0, 0)$.
Soluzione: Parametrizziamo la curva, grafico della funzione $y = 16/x^2$, con

$$\alpha(t) = (t, 16/t^2), \qquad t \in [1, 10].$$

La distanza fra il punto di γ di coordinate $\alpha(t) = (t, 16/t^2)$ e l'origine $O = (0, 0)$ è data da:

$$d = \sqrt{t^2 + \frac{256}{t^4}}$$

Vogliamo determinare il valore di $t \in [1, 10]$ per il quale $\sqrt{t^2 + \frac{256}{t^4}}$ assume il valore minimo. Tale problema è equivalente alla ricerca del minimo assoluto della funzione $f(t) = t^2 + \frac{256}{t^4}$ per $t \in [1, 10]$.
Calcoliamo i valori che f assume agli estremi dell'intervallo di definizione. Per $t = 1$ abbiamo $f(1) = 257$, per $t = 10$ abbiamo $f(10) = 100,0256$. Cerchiamo eventuali punti all'interno dell'intervallo $[1, 10]$ in cui $f' = 0$. Dato che

$$f'(t) = \frac{2t^3(t^6 - 2^9)}{t^8}$$

abbiamo che, per $t \in [1, 10]$, $f'(t) > 0$ per $t > 2\sqrt{2}$, e $f'(t) < 0$ per $t < 2\sqrt{2}$. $f'(t) = 0$ per $t = 2\sqrt{2}$, che è un punto di minimo relativo, dove $f(2\sqrt{2}) = 12$.
Concludendo, il punto di γ più vicino all'origine è $(2\sqrt{2}, 2)$ e la sua distanza dall'origine è $d = \sqrt{12}$.

Esercizio per casa

Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^3$ che giace sulla superficie di equazione $z = x^2 - xy + y^2$ e che si proietta sul piano xy sulla retta $x = 1 + y$, con $y \in [-1, 1]$. Trovare il punto di γ che ha altezza (=valore della coordinata z) massima e quello che ha altezza minima.
(Soluzione: $(2, 1)$ e $(1/2, -1/2)$)