Esercitazioni del 24/4/2013

Esercizi sulle curve nel piano e nello spazio

1. Esercizio n.1 della Provadiprova: Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$.
   Soluzione: Applicando la formula $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ otteniamo

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} dt = 2R \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt = 8R$$

2. Si consideri la curva $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\alpha(t) = (t^2 + 3, 2t^3 + t, t - 1)$. Calcolare versore tangente, versore normale e curvatura.
   Soluzione: Per il calcolo del versore tangente utilizziamo la formula $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, con: $\alpha'(t) = (2t, 6t^2 + 1, 1)$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(2t, 6t^2 + 1, 1)}{\sqrt{36t^4 + 16t^2 + 2}}$$

   Per calcolare la curvatura utilizziamo la formula $k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, con:

$$\alpha''(t) = (2, 12t, 0)$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = 2(-6t, 1, 6t^2 - 1)$$
$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 2\sqrt{2}\sqrt{18t^4 + 12t^2 + 1}$$
$$k(t) = \frac{\sqrt{18t^4 + 12t^2 + 1}}{(\sqrt{18t^4 + 8t^2 + 1})^3}$$

   Per calcolare il versore normale utilizziamo la formula $N(t) = B(t) \wedge T(t)$, con $B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$. Otteniamo quindi:

$$N(t) = \frac{(1 - 18t^4, 6t^3 + 2t, -18t^3 - 4t)}{\sqrt{18t^4 + 12t^2 + 1}\sqrt{18t^4 + 8t^2 + 1}}$$

3. Si consideri la curva $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\alpha(t) = (t^2 + 1, t - 1)$. Calcolare versore tangente, versore normale e curvatura.
   Soluzione: Utilizziamo lo stesso procedimento applicato nell'esercizio prece-

dente. Il versore tangente è dato dalla formula $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, con:

$$\alpha'(t) = (2t, 1), \quad T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(2t, 1)}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Per calcolare la curvatura utilizziamo la formula $k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, con:

$$\alpha''(t) = (2, 0), \quad \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (2t\mathbf{i} + 1\mathbf{j}) \wedge 2\mathbf{i} = -2\mathbf{k}$$

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

Infine $B(t) = -\mathbf{k}$ e

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\mathbf{i} - \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\mathbf{j} = \frac{(1, -2t)}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Esercizi su continuità , derivabilità e differenziabilità di funzioni di due variabili reali

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si discuta continuità , derivabilità e differenziabilità di tale funzione.
Soluzione:

- Nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è continua in quanto rapporto di due funzioni continue

$$f(x,y) = \frac{N(x,y)}{D(x,y)}, \quad N(x,y) = \sin(xy), \quad D(x,y) = x^2 + y^2,$$

  e il denominatore non si annulla in tali punti.
  Le derivate parziali nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)(x^2+y^2) - 2y\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\cos(xy)(x^2+y^2) - 2x\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2},$$

  che sono continue in tali punti in quanto rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla. Per la continuità delle derivate parziali possiamo concludere che nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è differenziabile.

- Analizziamo ora le proprietà della funzione nell'origine $(0,0)$.
  Possiamo notare che f non è continua in (0,0), in quanto non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

  Infatti, se (x,y) si avvicina a 0 lungo le rette $y = mx$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx^2)}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

  e tali valori variano al variare della pendenza della retta.
  Possiamo immediatamente concludere che f non può essere differenziabile in (0,0) in quanto non è neppure continua in quel punto.
  Per il calcolo delle derivate parzizli di f in (0,0) abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0,$$

  e possiamo dunque concludere che le derivate parziali in (0,0) esistono e sono entrambe nulle.