Esercitazioni del 7/5/2013

Integrali di linea di campi vettoriali

1. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da
$$F(x, y, z) = (z, -y, 2x),$$
lungo la curva γ definita da
$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \qquad t \in [0, 1].$$
Soluzione: Il lavoro del campo lungo la curva γ è dato da
$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt = \int_0^1 (t^3, -t^2, 2t) \cdot (1, 2t, 3t^2)dt = \int_0^1 5t^3 dt = \frac{5}{4}$$

2. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da
$$F(x, y) = (x^2y^2, x^3y),$$
lungo il perimetro del quadrato di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$, percorso in senso antiorario.
Soluzione: Calcoliamo il lavoro di F lungo il perimetro del quadrato come somma di quattro contributi: il lavoro lungo il segmento AB, il lavoro lungo il segmento BC, il lavoro lungo il segmento CD, e il lavoro lungo il segmento DA, tenendo conto del verso di percorrenza giusto.
Calcoliamo il lavoro lungo il segmento AB. Una parametrizzazione di tale segmento è $\alpha(t) = (t, 0)$, con $t \in [0, 1]$.
$$\int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)dt = \int_0^1 (0, 0) \cdot (1, 0)dt = 0.$$
Calcoliamo il lavoro lungo il segmento BC. Una parametrizzazione di tale segmento è $\alpha(t) = (1, t)$, con $t \in [0, 1]$.
$$\int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)dt = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (0, 1)dt = \int_0^1 tdt = 1/2.$$
Calcoliamo il lavoro lungo il segmento CD. Una parametrizzazione di tale segmento è $\alpha(t) = (1 - t, 1)$, con $t \in [0, 1]$.
$$\int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)dt = \int_0^1 ((1-t)^2, (1-t)^3) \cdot (-1, 0)dt = \int_0^1 -(1-t)^2 dt = -1/3.$$

Calcoliamo infine il lavoro lungo il segmento DA. Una parametrizzazione di tale segmento è $\alpha(t) = (0, 1-t)$, con $t \in [0,1]$.

$$\int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) dt = \int_0^1 (0,0) \cdot (0,-1) dt = 0.$$

Concludendo il lavoro totale del campo F lungo il perimetro del quadrato è dato da:

$$0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6}.$$

Campi conservativi e potenziali

1. Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$F(x,y) = (xy + x^3, x^2/2 + y)$$

Si dimostri che è conservativo e se ne calcoli un potenziale. Si calcoli poi il lavoro di F lungo la curva γ definita da $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in [0,\pi]$.
Soluzione: Dato che l'insieme di definizione del capo F è tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché F sia conservativo è che

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y),$$

dove $F_x(x,y)$ e $F_y(x,y)$ sono le funzioni componenti del campo, nel nostro caso

$$F_x(x,y) = xy + x^3, \qquad F_y(x,y) = x^2/2 + y.$$

Dato che $\frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y) = x$, possiamo concludere che il campo è conservativo.
Calcoliamo ora un potenziale, ovvero una funzione $U(x,y)$ tale che $F(x,y) = \nabla U(x,y)$, ovvero $F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} U(x,y)$ e $F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} U(x,y)$.
1 passo. Cerchiamo una funzione U tale che $\frac{\partial}{\partial x} U(x,y) = xy + x^3$. Integrando rispetto alla variabile x otteniamo che U deve essere della forma

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} y + \frac{x^4}{4} + f(y),$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una generica funzione della variabile y.
2 passo. Imponiamo ora anche la seconda condizione $\frac{\partial}{\partial y} U(x,y) = x^2/2 + y$. Otteniamo l'equazione

$$x^2/2 + f'(y) = x^2/2 + y$$

e quindi $f'(y) = y$, da cui $f(y) = y^2/2 + k$, dove k è una costante arbitraria. Concludendo il potenziale associato al campo F è

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2}y + \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} + k.$$

Per calcolare ora il lavoro del campo F lunfo la curva γ utilizziamo la formula

$$L(F,\gamma) = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(-\pi,0) - U(0,0) = \frac{\pi^4}{4}.$$

2. Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito da

$$F(x,y,z) = (yz + 3y, xz + 3x, xy - 2)$$

Si dimostri che è conservativo e se ne calcoli un potenziale.
Soluzione: Dato che l'insieme di definizione del campo F è tutto $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, F è conservativo se e solo se sono verificate contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y,z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}F_x(x,y,z),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}F_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}F_z(x,y,z)$$

dove

$$F_x(x,y,z) = yz + 3y, \quad F_y(x,y,z) = xz + 3x, \quad F_z(x,y,z) = xy - 2.$$

Dato che

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y,z) = z + 3$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}F_x(x,y,z) = y$$
$$\frac{\partial}{\partial z}F_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}F_z(x,y,z) = x$$

possiamo concludere che il campo F è conservativo.
Calcoliamo ora un potenziale, ovvero una funzione $U(x,y,z)$ tale che $F(x,,z) = \nabla U(x,y,z)$, ovvero $F_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z)$, $F_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z)$ e

$F_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)$.
1 passo. Cerchiamo una funzione U tale che $\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) = yz+3y$ Integrando rispetto a x otteniamo

$$U(x,y,z) = xyz + 3xy + g(y,z),$$

dove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una generica funzione delle variabili y e z.
2 passo. Imponiamo ora la seconda condizione $\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) = xz + 3x$. Otteniamo l'equazione

$$xz + 3x + \frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = xz + 3x$$

Abbiamo che $\frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = 0$ e dunque $g(y,z) = f(z)$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una generica funzione della variabile z.Il potenziale U ha dunque la forma

$$U(x,y,z) = xyz + 3xy + f(z).$$

3 passo. Imponiamo ora la terza condizione $\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) = xy - 2$. Otteniamo l'equazione

$$xy + f'(z) = xy - 2$$

e dunque $f'(z) = -2$, e $f(z) = -2z + k$, dove k è un'arbitraria costante reale. Concludendo il potenziale associato al campo F è

$$U(x,y,z) = xyz + 3xy - 2z + k.$$