Esercitazioni del 8 aprile 2013

Derivate parziali e derivate direzionali

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = xy^{1/3}$. Calcolare le sue derivate parziali.
   Notiamo intanto che f è continua su tutto il piano (in quanto prodotto di funzioni continue). Calcoliamo ora le derivate parziali (nei punti in cui esistono).
   Per quanto riguarda $\frac{\partial}{\partial x} f$ abbiamo che esiste per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e vale:

   $$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = y^{1/3}.$$

   Per quanto riguarda $\frac{\partial}{\partial y} f$, nei punti in cui la coordinata $y \neq 0$ abbiamo:

   $$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{1}{3} xy^{-2/3}, \qquad y \neq 0.$$

   Nei punti di coordinate (x, y), con $x \neq 0$ e $y = 0$ si verifica che non esiste $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ in quanto non esiste finito il limite:

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} xh^{-2/3}.$$

   L'origine, di coordinate $(0, 0)$, va analizzata separatamente. Infatti abbiamo che esiste il limite

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(x, 0)}{h} = 0$$

   e quindi esiste $\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

   $$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \geq x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Calcolare le derivate parziali e le derivate direzionali di f nell'origine $(0, 0)$.
   Si consiglia di disegnare le regioni del piano cartesiano in cui la funzione assume il valore 1 (la regione che sta sopra la parabola $y = x^2$ e la regione che sta sotto la parabola $y = -x^2$) e le regioni in cui la funzione assume il valore 0 (come fatto a lezione).
   Si può notare che la funzione non è continua in $(0, 0)$, infatti non esiste il limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

Calcoliamo le derivate parziali. Notiamo che non esiste $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)$ in quanto non esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-1}{h}.$$

Invece è ben definita $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)$, in quanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

Potevamo arrivare rapidamente a questo risultato notando che la funzione f ristretta all'asse y è la funzione costante pari a 1 (e quindi la sua derivata vale 0).

Calcoliamo ora la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ nella direzione di un vettore $\mathbf{v}=(a,b)$, dove supporremo che $a\neq 0$ e $b\neq 0$ (altrimenti ricadiamo nei due casi appena analizzati).

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h\mathbf{v})-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}.$$

Se h è sufficientemente piccolo, in particolare se $|h|<|b|/a^2$ si ha che $|hb|>h^2a^2$ e quindi $f(ha,hb)=1$. possiamo dunque concludere che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

e dunque $D_{\mathbf{v}}f(0,0)=0$.

Rette e piani nello spazio

Determinare per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ il piano tangente al grafico della funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\sin(\alpha x+y^2)$$

nel punto $(0,\sqrt{\pi},0)$ è parallelo alla retta $x=y=2z$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,\sqrt{\pi},0)$ è :

$$z=0+\frac{\partial}{\partial x}f(0,\sqrt{\pi})(x-0)+\frac{\partial}{\partial y}f(0,\sqrt{\pi})(y-\sqrt{\pi})$$

$$z=-\alpha x-2\sqrt{\pi}y+2\pi$$

Scrivendo tale equazione come $\alpha x+2\sqrt{\pi}y+z=2\pi$ possiamo subito dedurre che la direzione ortogonale al piano è data dal vettore $N=(\alpha,2\sqrt{\pi},1)$.

La retta descritta dalle equazioni $x = y = 2z$ può essere parametrizzata ad esempio ponendo $x = t$, da cui $y = x = t$ e $z = x/2 = t/2$. La parametrizzazione è dunque $\alpha(t) = (t, t, t/2)$ e vediamo immediatamente che il vettore che dà la direzione della retta, il vettore tangente, è $(1, 1, 1/2)$. Il piano è parallelo alla retta se il vettore $(1, 1, 1/2)$ è ortogonale al vettore $N = (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1)$, ovvero se

$$(1, 1, 1/2) \cdot (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1) = 0$$

Otteniamo l'equazione $\alpha + 2\sqrt{\pi} + 1/2 = 0$ che risolta fornisce il valore $\alpha = -2\sqrt{\pi} - 1/2$.