Esercizi sulle funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nei casi:
   (a) $f(x, y) = x$
   (b) $f(x, y) = y^2$
   (c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

2. Descrivere le curve di livello della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nei casi:
   (a) $f(x, y) = x - y$
   (b) $f(x, y) = xy$
   (c) $f(x, y) = \sin(x)$
   (d) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$
   (e) $f(x, y) = \frac{x-y}{2x+y}$, dove f è definita in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 2x + y \neq 0\}$
   (f) $f(x, y) = \frac{y}{x}e^x$, dove f è definita in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \neq 0\}$

3. Per le funzioni che seguono, determinare il gradiente della funzione data nel punto indicato e l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto indicato.
   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ in $(2, 2)$
   (b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ in $(1, 1)$
   (c) $f(x, y) = x^y$ in $(1, 5)$

4. Si consideri il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + 6x - 4y$.
   (a) Calcolare il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in cui il piano tangente è orizzontale.
   (b) Calcolare il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in cui il piano tangente è ortogonale al vettore $N = (2, -4, -1)$.

5. Determinare la direzione di massima crescita della funzione data nel punto indicato:
   (a) $f(x, y) = \log(x^2 + 3y^2)$ in $(2, 1)$
   (b) $f(x, y) = e^{-y^2}\cos(x)$ in $(\pi, 1)$
   (c) $f(x, y) = xy$ in $(1, 1)$
   (d) $f(x, y) = \sin(x)\cos(xy)$ in $(\pi/2, 0)$

6. Determinare la derivata direzionale della funzione data nel punto indicato e nella direzione specificata

   (a) $f(x, y) = e^{xy}$ in $(1, 1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

   (b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ in $(1, 2)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

   (c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

   (d) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+2y^2}$ in $(1, 1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$.

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   Calcolare il vettore gradiente di f in $(0, 0)$ e la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ di f in $(0, 0)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Come mai la formula $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v}$ non vale?

8. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = \sin(xy)$ e la funzione $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^2, \cos(t))$. Si calcoli la derivata della funzione composta $f \circ \alpha$.

9. La temperatura T in una regione del piano i cui punti vengono descritti dalle coordinate cartesiane (x, y) viene espressa dalla funzione $T(x, y) = x^2 + 2y^2$. Un osservatore si muove in tale regione e le sue coordinate variano nel tempo con la legge oraria $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (2 - t^3, t)$. Calcolare la derivata temporale della temperatura percepita dall'osservatore al variare del tempo t.