

### Esercizi di riepilogo sulle curve

1. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

(a) l'ellisse  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

(b)  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$

(c)  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq x\}$

(d) la retta in  $\mathbb{R}^3$  intersezione dei piani  $z = 2x + y$  e  $z = -x + 3y$

(e) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $x + y + z = 0$  con la superficie  $x^2 + y = 0$

(f) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $z = 1$  con la superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(g) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $x + z = 0$  con la superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(h) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $x + y + z = 0$  con la superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(i) la curva in  $\mathbb{R}^3$  intersezione del piano  $y + z = 1$  con la superficie conica  $z^2 = x^2 + y^2$  dal punto  $(0, 1/2, 1/2)$  al punto  $(1, 0, 1)$ .

2. Si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f ds$ , dove  $\gamma$  è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left( e^t \cos t, e^t \sin t, t \right) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

$$\text{e } f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

3. Si calcoli l'integrale di linea  $\int_{\gamma} f ds$ , dove  $\gamma$  è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} \right) \quad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

$$\text{e } f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$$

4. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.

5. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t + \cos t, t - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

6. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura della curva  $\gamma$  parametrizzata da

$$\alpha(t) = ((2 + \cos t) \sin t, (2 + \cos t) \cos t, \sin t)$$

nel punto corrispondente al valore di  $t = \pi/2$ . Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.

7. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto dell'arco di spirale di Archimede, parametrizzato da:

$$\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

8. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva grafico della funzione  $y = \cosh x$ .