Esercizi su curve ed integrali curvilinei

1. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

   (a) l'ellisse $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$
   Soluzione: $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$
   Soluzione: $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

   (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq x\}$
   Soluzione: $\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [\arctan(3/2), \arctan(3/2) + \pi]$.

   (d) la retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione dei piani $z = 2x + y$ e $z = -x + 3y$
   Soluzione: $\gamma(t) = (t, 3t/2, 7t/2)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (e) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + y + z = 0$ con la superficie $x^2 + y = 0$
   Soluzione: $\gamma(t) = (t, -t^2, +t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (f) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $z = 1$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   Soluzione: $\gamma(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (g) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   Soluzione: $\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (h) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x+y+z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   Soluzione: $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin t, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin t, -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (i) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $y + z = 1$ con la superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ dal punto $(0, 1/2, 1/2)$ al punto $(1, 0, 1)$.
   Soluzione: $\gamma(t) = (t, (1 - t^2)/2, (1 + t^2)/2)$, $t \in [0, 1]$.

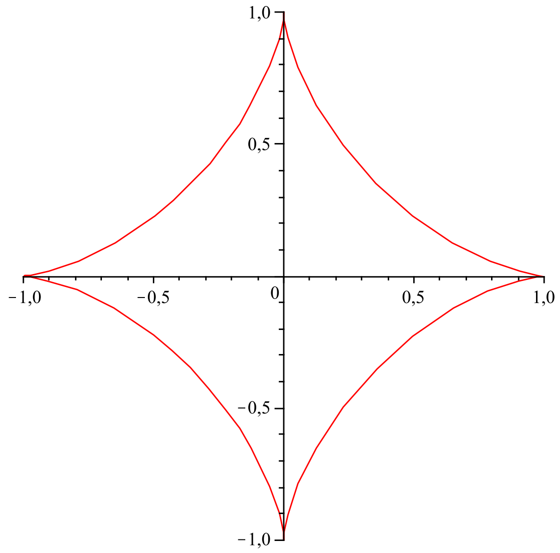
2. Si calcoli la lunghezza della curva C, parametrizzata da:

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   Soluzione: applicando la formula $L = \int_0^3 \|\gamma'(t)\| dt$ otteniamo:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3|\sin t \cos t| dt = 6 \end{aligned}$$

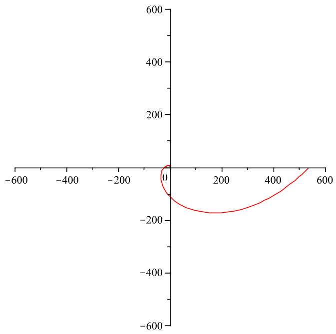
Tale curva è detta *astroide* (si veda la figura).



l'astroide $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

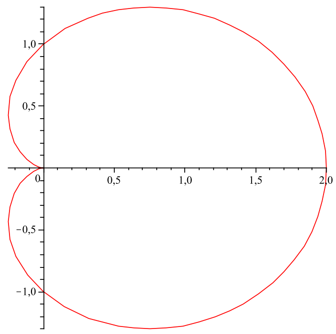
3. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da
$$\gamma(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
Soluzione: applicando la formula $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = e^\theta$ otteniamo:
$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

4. Si calcoli la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da
$$\gamma(\theta) = ((1 + \cos\theta)\cos\theta, (1 + \cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
Soluzione: applicando la formula $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$, con $\rho(\theta) = (1 + \cos\theta)$ otteniamo:
$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta = 8 \end{aligned}$$



la curva parametrizzata da $\gamma(\theta) = (e^\theta \cos\theta, e^\theta \sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

Tale curva è detta *cardioide* (si veda la figura)



la cardioide $\gamma(\theta) = ((1 + \cos\theta)\cos\theta, (1 + \cos\theta)\sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$

5. Una ruota di raggio R ruota senza strisciare lungo l'asse delle x con velocità angolare ω. Un punto solidale al bordo della ruota descrive una curva piana, detta *cicloide*, di parametrizzazione

$$\gamma(t) = (R\omega t - R\sin(\omega t), R - R\cos(\omega t)), \qquad t \in [0, +\infty).$$

- Verificare che la curva non è regolare, ma è regolare a tratti.
- Per ogni $t \in [0, +\infty)$ calcolare il valore della lunghezza d'arco $s(t)$.
  Soluzione:

$$\begin{aligned} s(t) &= 2R\omega \int_0^t \left|\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right| d\tau = 4R \int_0^{\frac{\omega t}{2}} |\sin(u)| du \\ &= 4R \left(2\lfloor \omega t/2\pi \rfloor + 1 - (-1)^{\lfloor \omega t/2\pi \rfloor} \cos(\frac{\omega t}{2})) \right) \end{aligned}$$

6. Si calcoli l'integrale di linea $\int_C f ds$, dove C è la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = \Big(e^t \cos t, e^t \sin t, t\Big) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.
Soluzione:

$$\int_C f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} e^{2t}\sqrt{2e^{2t}+1}dt = \frac{1}{6}\Big((1+2e^{\sqrt{2}})^{3/2} - 3^{3/2}\Big)$$

7. Si calcoli l'integrale di linea $\int_C f ds$, dove C è la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\Big) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = (2y^2 + 1)^{-3/2}$
Soluzione:

$$\int_C f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} (2t^2+1)^{-3/2}(2t^2+1)^{1/2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(t\sqrt{2})\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

8. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\gamma(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.
Soluzione: Se indichiamo con ρ la densità lineare di massa abbiamo

$$M = \rho\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta = \rho\int_0^{2\pi} 2\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}d\theta = 2\rho\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8\rho$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{8\rho}\int_0^{2\pi}\rho(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta + \frac{1}{8}\int_\pi^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{8\rho}\int_0^{2\pi}\rho(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\cos\theta)\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\left|\cos\beta\right|d\beta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\cos\beta d\beta-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\cos\beta d\beta \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

9. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z)=(z,-y,2x)$$
e C è la curva parametrizzata da
$$\gamma(t)=(t,t^2,t^3) \qquad t\in[0,1]$$

$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=5/4.$

10. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$$
e C è l'arco di spirale parametrizzato da
$$\gamma(\theta)=(\theta\cos\theta,\theta\sin\theta) \qquad \theta\in[0,2\pi]$$
.
$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=8\pi^3/3,$

11. Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y)=(x^2y^2,x^3y)$$
e C è il perimetro del quadrato di vertici (0,0), (1,0), (1,1),(0,1), percorso in senso antiorario.
$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=1/6.$