Integrali tripli

Integrali tripli

1. Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, con
   (a) $f(x,y,z) = \frac{x+y}{z}$ e $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [1,2]$.
   (b) $f(x,y,z) = y^2 z$ e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy\}$.
   (c) $f(x,y,z) = \frac{1}{(y+1)^3}$ e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le x \le 1, 0 < z \le 1, 0 < y \le x+z\}$.

2. Calcolare il volume di $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \le 1\}$.

3. Calcolare il baricentro di una semisfera omogenea situata nel semispazio $z \ge 0$

4. Calcolare $\int\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, con $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z^2 - x^2 - y^2 \le 0, z \ge 0\}$.

5. Calcolare il volume del solido compreso tra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ ed il piano di equazione $z = 2$

6. Calcolare $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,z) = xz$ e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1, (x-z)^2 + y^2 \le z^2 + 1\}$.

7. Calcolare $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,z) = x - y + z$ e $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0\}$.

8. Calcolare il volume della calotta sferica $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge r\}$, con $r < R$.

9. Calcolare le coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro di un ottante di sfera $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

10. Calcolare il volume del toro, ovvero del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z del cerchio nel piano (y,z) di centro $(3,0)$ e raggio 1.

11. Si calcoli il volume della parte di cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \le 1\}$, compresa tra i piani $z = 1$ e $x + y + z = 1$

12. Si calcoli $\int\int\int_\Omega zdxdydz$ dove Ω è l'intersezione delle due sfere $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$

Soluzioni

1.(a)

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{x+y}{z} dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_1^2 \frac{x+y}{z} dz = \log(2)$$

1.(b) Ω è semplice per fili:

$$\int\int\int_{\Omega} y^2 z dx\, dy\, dz = \int\int_D dxdy \int_0^{xy} y^2 z dz$$

con $D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x\}$, quindi

$$\int\int_D dxdy \int_0^{xy} y^2 z dz = \int_0^2 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} y^2 z dz = \frac{16}{5}$$

1.(c) Ω è semplice per fili:

$$\int\int\int_{\Omega} \frac{1}{(1+y)^3} dx\, dy\, dz = \int\int_D dxdz \int_0^{x+z} \frac{1}{(1+y)^3} dy$$

con $D = [0, 1] \times [0, 1]$, quindi

$$\int\int_D dxdz \int_0^{x+z} \frac{1}{(1+y)^3} dy = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^{x+z} \frac{1}{(1+y)^3} dy = \frac{1}{2}\log(3/4) + \frac{1}{2}$$

2. Ω è semplice per fili, quindi

$$V = \int\int\int_{\Omega} dx\, dy\, dz = \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} dz = \int\int_D (2-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}) dxdy$$

con $D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Utilizzando le coordinate polari nel piano:

$$\int\int_D (2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - \rho^2 - \rho)\rho\, d\rho = \frac{5}{6}\pi$$

3. Utilizzando le coordinate polari nello spazio, l'insieme su cui integriamo è definito dalle diseguaglianze $0 \le \mathbb{R}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, quindi la massa è data da

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R \rho^2 \sin\phi\, d\rho = \frac{2}{3}\pi R^3$$

La coordinata x_G è data da:

$$x_G = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R \rho^3 \sin\phi^2 \cos\theta \, d\rho = 0$$

La coordinata y_G è data da:

$$y_G = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R \rho^3 \sin\phi^2 \sin\theta \, d\rho = 0$$

La coordinata z_G è data da:

$$z_G = \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R \rho^3 \sin\phi \cos\phi \, d\rho = \frac{3}{8}R$$

4. Utilizzando le coordinate polari nello spazio, l'insieme su cui integriamo è definito dalle diseguaglianze $0 \leq 1$, $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, l'integrale diviene quindi

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\phi \int_0^1 \rho^3 \sin\phi \, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

5. $V = 2\pi$

6. Integrando per strati si ottiene $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \frac{8}{15}\pi$

7. $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \frac{R^4\pi}{4}$

8. $V = \pi\left(\frac{2}{3}R^3 - R^2 r + \frac{r^3}{3}\right)$

9. $(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R\right)$

10. $V = 6\pi^2$.

11. Integrando per fili, $V = 2\int\int_D (x+y)dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1, y \geq -x\}$. Utilizzando le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\rho\sin\theta$:

$$2\int\int_D (x+y)dxdy = 2\int_0^1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\rho\cos\theta + \frac{\rho}{2}\sin\theta\right)\frac{\rho}{2} d\rho d\theta$$

dove $\tan\theta_1 0 \tan\theta_2 = -2$ e $\theta_1 \in [-\pi/2, 0]$, $\theta_2 = \theta_1 + \pi$. Abbiamo dunque

$$2\int\int_D (x+y)dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{6}\sin\theta\right) d\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_2 - \frac{1}{3}cos\theta_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

12. $\int\int\int_\Omega zdxdydz = \frac{5}{24}\pi$