Integrali doppi

1. Calcolare l'integrale doppio $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$, con

   (a) $f(x,y) = xy^2$ e Ω è il triangolo di vertici (-1,0), (1,0), (1,1).

   (b) $f(x,y) = x - y$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

   (c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2,\ 1 \leq x \leq 2\}$

   (d) $f(x,y) = \frac{\sin y^2}{y}$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq y^2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$

   (e) $f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq x\}$

   (f) $f(x,y) = y$ e Ω è il semicerchio di raggio 1 , con centro nel punto (1,0) e situato nel semipiano $y \geq 0$.

   (g) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ e Ω è l'ellisse di semiassi a, b:

   $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

   (h) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ e Ω è l'insieme delimitato dalle rette $y = 1$, $x = 0$ e dalla parabola $y^2 = x$.

2. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana di densità di massa data dalla funzione $f(x,y) = y$ di forma: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leq y \leq 1\}$

3. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana omogenea Ω a forma di semicerchio:

   $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$$

4. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana omogenea a forma di cardioide, il cui bordo è la curva data in coordinate polari da $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Soluzioni

1.(a) Ω può essere scritto come insieme y-semplice:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{x+1}{2}\}$$

e quindi

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} (\int_0^{\frac{x+1}{2}} xy^2\, dy)\, dx = \frac{1}{10}$$

Ω può anche essere scritto come insieme x-semplice:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le y \le 1,\ 2y-1 \le x \le 1\}$$

e quindi

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_0^1 (\int_{2y-1}^{1} xy^2\, dx)\, dy = \frac{1}{10}$$

1.(b) Ω può essere scritto come insieme y-semplice: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1\}$.

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x - y\, dy)\, dx = 0$$

1.(c) Ω è y-semplice:

$$\begin{aligned}
\int\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_1^2 (\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy)\, dx \\
&= \int_1^2 (\arctan x - \arctan(x/2))\, dx \\
&= \Big[x(\arctan x - \arctan(x/2)) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \log(4+x^2)\Big]_1^2 \\
&= 2\arctan 2 - \frac{3}{4}\pi + \arctan(1/2) + \frac{7}{2}\log(2) - \frac{3}{2}\log(5)
\end{aligned}$$

1.(d)

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} (\int_0^{y^2} \frac{\sin y^2}{y}\, dx)\, dy = 1$$

1.(e) Passando in coordinate polari

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int\int_{\Omega'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$$

con $\Omega' = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi], 2 \le \rho \le 3,\ \pi/4 \le \theta \le 5\pi/4\}$. L'integrale diviene

$$\int_2^3 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos\theta \sin^2\theta \rho\, d\rho\, d\theta = -5\sqrt{2}/12$$

1.(f) $f(x,y) = y$ e Ω è il semicerchio di raggio 1 , con centro nel punto (1,0) e situato nel semipiano $y \geq 0$. Introducendo le coordinate polari cenrate in (1,0):

$$x(\rho,\theta) = 1 + \rho\cos\theta, \qquad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$$

l'integrale diviene

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Omega'} f(1+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$$

con $\Omega' = [0,1] \times [0,\pi]$. Quindi

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\pi} \rho^2 \sin\theta d\theta d\rho = \frac{2}{3}$$

1.(g) Utilizzando le coordinate ellittiche nel piano

$$x(\rho,\theta) = a\rho\cos\theta, \qquad y(\rho,\theta) = b\rho\sin\theta$$

dove $\det(J(\rho,\theta)) = ab\rho$, l'integrale diviene

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\int_{\Omega'} f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)ab\rho\, d\rho\, d\theta$$

con $\Omega' = [0,1] \times [0,2\pi]$. L'integrale diviene

$$ab\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{3}\pi\, a\, b$$

1.(h) 1/2

2. L'insieme Ω è y-semplice:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 \leq y \leq 1,\, -1 \leq x \leq 1\}$$

La massa della lamina è data da

$$M = \int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 y\, dy\, dx = \frac{4}{5}$$

La coordinata x_G è data da:

$$x_G = \frac{5}{4}\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 yx\, dy\, dx = 0$$

La coordinata y_G è data da:

$$y_G = \frac{5}{4}\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 y^2\, dy\, dx = \frac{5}{7}$$

3. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana omogenea Ω a forma di semicerchio:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$$

Trasformando l'integrale in coordinate polari l'insieme Ω diviene $\{0 \leq \rho \leq 1,\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$. La massa della lamina è data da

$$M = \int\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{\pi}{2}$$

La coordinata x_G è data da:

$$x_G = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \cos\theta \, d\theta \, d\rho = \frac{4}{3\pi}$$

La coordinata y_G è data da:

$$y_G = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\rho = 0$$

4. Calcolare le coordinate (x_g, y_g) del baricentro di una lamina piana omogenea a forma di cardioide, il cui bordo è la curva data in coordinate polari da $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

La massa della lamina è data da

$$M = \int\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} \rho \ d\rho \, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

La coordinata x_G è data da:

$$x_G = \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} \rho^2 \cos\theta \ d\rho \, d\theta = \frac{2}{9\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^3 \cos\theta d\theta = \frac{5}{6}$$

La coordinata y_G è data da:

$$y_G = \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \ d\rho \, d\theta == \frac{2}{9\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = 0$$