Esercizi su massimi e minimi assoluti e moltiplicatori di Lagrange

1. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$
nell'insieme
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3\}$$

2. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - \frac{xy}{2}$$
nell'insieme
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 \le 4\}$$

3. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = xy$$
nell'insieme
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1, x \ge 0, y \ge 0\}$$

4. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione
$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$
nell'insieme
$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

5. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione
$$f(x,y,z) = xy^2z^3$$
nell'insieme
$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 12, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$$

6. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$$
nell'insieme
$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$$

7. Si determinino i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = xyz(x-y+z)$ nel cubo $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

8. Scomporre il numero positivo a in tre addendi non negativi in maniera tale che il loro prodotto sia massimo.

9. Se una corrente elettrica I scorre in un circuito elettrico di resistenza R, la quantità di calore emessa nell'unità di tempo è proporzionale a I^2R. Come si deve scomporre la corrente I in tre correnti I_1, I_2, I_3 con l'aiuto di tre conduttori di resistenza R_1, R_2, R_3 perchè la quantità di calore emesso sia minima?

Soluzioni

1. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

nell'insieme

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

L'insieme A è il triangolo (pieno) di vertici $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$. Dato che è un insieme chiuso e limitato, e la funzione f è continua, allora f ammette massimo e minimo assoluto su A.

- f è ovunque differenziabile (in quanto di classe C^1), quindi non ci sono punti singolari
- Calcoliamo i punti stazionari interni al triangolo, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

  che ha come soluzione la coppia $(x,y) = (-1,-1)$, che è un punto inteno al triangolo. Il valore di f in $(-1,-1)$ è -1.
- Consideriamo ora il bordo dell'insieme A, costituito da tre segmenti (i tre lati del triangolo).
  Sul segmento $x = 0$, $-3 \leq y \leq 0$ la funzione assume la forma

$$f(0,y) = y^2 + y$$

  Il valore massimo viene assunto nel punto $(0,-3)$ e vale $f(0,-3) = 6$, il valore minimo viene assunto nel punto $(0,-1/2)$ e vale $f(0,-1/2) =$

$-1/4$.
Sul segmento $y = 0$, $-3 \leq x \leq 0$ la funzione assume la forma

$$f(x, 0) = x^2 + x$$

Il valore massimo viene assunto nel punto $(-3, o)$ e vale $f(-3, 0) = 6$, il valore minimo viene assunto nel punto $(-1/2, 0)$ e vale $f(-1/2, 0) = -1/4$.
Sul segmento $y = -3 - x$, $-3 \leq x \leq 0$ la funzione assume la forma

$$f(x, -3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$$

Il valore minimo viene assunto nel punto $(-3/2, -3/2)$ e vale $f(-3/2, -3/2) = -3/4$, il valore massimo viene assunto nel punto $(0, -3)$ e nel punto $(-3, 0)$ vale 6.

In conclusione il valore massimo di f è 6 e viene assunto nei punti $(0, -3)$ e $(-3, 0)$, mentre il valore minimo di f è -1 e viene assunto nel punto stazionario interno $(-1, -1)$.

2. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - \frac{xy}{2}$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

L'insieme A è l'ellisse (piena) di semiassi 2 e 1. A è un insieme chiuso e limitato, f è una funzione continua, quindi f ammette massimo e minimo assoluti su A.

- f è ovunque differenziabile (in quanto di classe C^1), quindi non ci sono punti singolari
- Calcoliamo i punti stazionari interni all'ellisse, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y/2 = 0 \\ 10y - x/2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione la coppia $(x, y) = (0, 0)$, che è un punto interno all'ellisse. Il valore di f in $(0, 0)$ è 0.

- Consideriamo ora il bordo dell'ellisse, ovvero l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 = 4\}$. Parametrizzando i punti dell'ellisse come $x(\theta) = 2\cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, abbiamo che la funzione f diviene

$$f(x(\theta), y(\theta)) = 4\cos^2\theta + 5\sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

che assume valore massimo per $\theta = 5\pi/8$ e in $\theta = 13\pi/8$, in cui la funzione vale $9/2 + \sqrt{2}/2$, mentre assume valore minimi per $\theta = \pi/8$ e in $\theta = 9\pi/8$, in cui la funzione vale $9/2 - \sqrt{2}/2$. Questi risultati potevano essere ottenuti anche utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Concludendo il minimo assoluto di f su A è 0 e viene assunto nel punto stazionario interno $(0,0)$, mentre il massimo assoluto di f su A è $9/2 + \sqrt{2}/2$ e viene assunto nei due punti del bordo $(2\cos(5\pi/8), \sin(5\pi/8))$ e in $(2\cos(13\pi/8), \sin(13\pi/8))$

3. Il valore minimo è 0 e viene assunto in (0,1) e in (1,0), mentre il valore massimo è $1/4$ e viene assunto in $(1/2, 1/2)$.

4. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$

nell'insieme

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, per trovare gli estremi della funzione f nell'insieme descritto dal vincolo di uguaglianza $x^2+y^2+z^2-9=0$.
Il gradiente di $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ si annulla solo nell'origine $(0,0,0)$, che non appartiene all'insieme A. f e g sono di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, quindi il metodo è applicabile.
La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ -2 - 2\lambda y = 0 \\ 2 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni:

$$\lambda = 1/2, \qquad x = 1, \qquad y = -2, \quad z = 2$$

dove $f(1, -2, 2) = 9$, e

$$\lambda = -1/2, \qquad x = -1, \qquad y = 2, \quad z = -2$$

dove $f(-1, 2, -2) = -9$. Quindi 9 è il valore massimo e -9 è il valore minimo.

5. Determinare i punti di massimo ed di minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Il valore massimo si assume in $(2, 4, 6)$ e vale $2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$, mentre il minimo si ottiene per $x = 0$ o per $y = 0$ o per $z = 0$ e vale 0.

6. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Il valore massimo è $3\sqrt{3}/2$ e si assume nel punto interno $(\pi/3, \pi/3)$, mentre il minimo è 0 e si assume nel punto (0,0).

7. Si determinino i punti di massimo edi minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = xyz(x - y + z)$ nel cubo $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

   - Esaminiamo prima i punti interni del cubo, ovvero i punti dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ |\ 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$. I candidati ad essere massimi-minimo assoluti sono i punti tali che $\nabla f = (0, 0, 0)$. Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} yz(2x - y + z) = 0 \\ xz(x - 2y + z) = 0 \\ xy(x - y + 2z) = 0 \end{cases}$$

dato che cerchiamo punti all'interno del cubo, sicuramente $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. dobbiamo allora risolvere il sistema (lineare di tre equazioni in tre incognite)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x = 0, y = 0, z = 0$. Non ci sono quindi punti stazionari interni.

- Esaminiamo ora i punti sul bordo del cubo, formato da sei facce.

  (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(0, y, z) = 0$. Su questa faccia la funzione è identicamente uguale a 0.

  (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(x, 0, z) = 0$. Su questa faccia la funzione è identicamente uguale a 0.

  (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\}$. In questo caso abbiamo che $f(x, y, 0) = 0$. Su questa faccia la funzione è identicamente uguale a 0.

  (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(1, y, z) = yz(1 - y + z)$. Dobbiamo dunque cercare il massimo minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x, y) = yz(1 - y + z)$ nel quadrato $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
  Per quanto riguarda i punti interni del quadrato, ovvero i punti $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$, imponiamo $\nabla g(y, z) = (0, 0)$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema

  $$\begin{cases} z(1 - 2y + z) = 0 \\ y(1 - y + 2z) = 0 \end{cases}$$

  Dato che stiamo cercando soluzioni tali che $y \neq 0$ e $z \neq 0$, il sistema si riduce a

  $$\begin{cases} (1 - 2y + z) = 0 \\ (1 - y + 2z) = 0 \end{cases}$$

  che ha come soluzione $y = 1/3, z = -1/3$ che non appartiene all'insime $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$.
  Analizziamo ora il bordo del quadrato. Sui segmenti $x = 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1$ e $x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0$ abbiamo che $f = 0$.
  Sul segmento $x = 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1$ abbiamo $f(1, 1, z) = z^2$. Il

minimo è nel punto z=0 e vale 0, il massimo è per z=1 r vale 1.
$x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1$ abbiamo $f(1, y, 1) = y(2 - y)$, Il minimo è nel punto z=0 e vale 0, il massimo è per z=1 e vale 1.

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |y = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(x, 1, z) = xz(x - 1 + z)$. Dobbiamo dunque cercare il massimo minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x, z) = xz(x - 1 + z)$ nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
Per quanto riguarda i punti interni del quadrato, ovvero i punti $0 < x < 1$ e $0 < z < 1$, imponiamo $\nabla g(x, z) = (0, 0)$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} z(2x - 1 + z) = 0 \\ x(x - 1 + 2z) = 0 \end{cases}$$

Dato che stiamo cercando soluzioni tali che $x \neq 0$ e $z \neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} (2x - 1 + z) = 0 \\ (x - 1 + 2z) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x = 1/3, z = 1/3$, e $f(1/3, 1, 1/3) = -1/27$.
Analizziamo ora il bordo del quadrato. Sui segmenti $x = 0, y = 1, 0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1, y = 1, z = 0$ abbiamo che $f = 0$.
Il segmento segmento $x = 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1$ è stato studiato al punto 4 (abbiamo $f(1, 1, z) = z^2$. Il minimo è nel punto (1,1,0) e vale 0, il massimo è in (1,1,1) e vale 1. Sul segmento $0 \leq x \leq 1, y = 1 \leq 1, z = 1$ abbiamo $f(x, 1, 1) = x^2$, Il minimo è nel punto x=0 e vale 0, il massimo è per x=1 e vale 1.

(f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq zyleq1\}$. In questo caso abbiamo che $f(1, y, z) = xy(x - y + 1)$. Dobbiamo dunque cercare il massimo minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x, y) = xy(x - y + 1)$ nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
Per quanto riguarda i punti interni del quadrato, ovvero i punti $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, imponiamo $\nabla g(x, y) = (0, 0)$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} y(2x - y + 1) = 0 \\ x(x - 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

Dato che stiamo cercando soluzioni tali che $y \neq 0$ e $x \neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} (2x - y + 1) = 0 \\ (x - 2y + 1) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $y = 1/3, x = -1/3$ che non appartiene all'insime $0 < y < 1$ e $0 < x < 1$.

Analizziamo ora il bordo del quadrato. Sui segmenti $0 \leq x \leq 1, y = 0, z = 1$ e $x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1$ abbiamo che $f = 0$.
Il segmento $z = 1, y = 1, 0 \leq x \leq 1$ è stato studiato al punto 5 (il minimo è in (0,1,1) e vale 0, il massimo è in (1,1,1) e vale 1). Il segmento $z = 1, x = 1, 0 \leq y \leq 1$ è stato studiato al punto 4 (il minimo è in (1,0,1) e vale 0, il massimo è in (1,1,1) e vale 1).

Concludento il punto di massimo assoluto di f su Q è (1,1,1) dove la funzione vale 1, il punto di minimo assoluto di f su Q è (1/3,1,1/3) dove la funzione vale -1/27.

8. Scomporre il numero positivo a in the addendi non negativi in maniera tale che il loro prodotto sia massimo. Scriviamo a come somma di tre numeri positivi x, y, z:

$$a = x + y + z, \qquad x > 0, y > 0, z > 0$$

e cerchiamo di massimizzare il prodotto xyz. Il problema equivale a cercare il valore massiomo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ sull'insieme definito dal vincolo di uguaglianza $x+y+z-a = 0$. Utilizzimo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - a)$$

risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = y = z = a/3$ e $f(a/3, a/3, a/3) = a^3/27$

9. Se una corrente elettrica I scorre in un circuito elettrico di resistenza R, la quantità di calore emessa nell'unità di tempo è proporzionale a I^2R. Come si deve scomporre la corrente I in tre correnti I_1, I_2, I_3 con l'aiuto di tre conduttori di resistenza R_1, R_2, R_3 perchè la quantità di calore emesso sia minima?

Dobbiamo minimizzare la funzione $f(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$ sotto il vincolo $g(I_1, I_2, I_3) = 0$, con $g(I_1, I_2, I_3) = I_1 + I_2 + I_3 - I$. Impostando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo che

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3, \qquad I_1 + I_2 + I_3 = I$$

Quindi

$$I_1 = \frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}I,$$
$$I_2 = \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}I,$$
$$I_3 = \frac{R_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}I$$