Esercizi su massimi e minimi locali

Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$
2. $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$
3. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
5. $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$
6. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
7. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$
8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
9. $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1+z^2)$
10. $f(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - xy + z^2$

Soluzioni

Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$
   Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2(x-1), 2y)$, quindi $(1,0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è
   $$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   che è definita positiva, quindi il punto stazionario è un punto di minimo locale.

2. $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$ Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2(x-1), -2y)$, quindi $(1,0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è
   $$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
   che è indefinita, quindi il punto stazionario è un punto di sella.

3. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2x + y - 2, x + 2y - 1)$, quindi $(1,0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è
$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
che è definita positiva, quindi il punto stazionario è un punto di minimo locale.

4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 + 4x - 4y)$, quindi $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sono i tre punti stazionari. La matrice Hessiana di f in un generico punto di coordinate (x,y) è
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$
Nei punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ la matrice Hessiana è :
$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$
che è definita positiva, quindi i due punti stazionari sono punti di minimo locale.
Nel punto $(0,0)$ la matrice Hessiana è :
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$
che è semidefinita negativa, quindi l'analisi della matrice Hessiana non permette di dire nulla sulla natura del punto stazionario. Andiamo ad analizzare il segno della differenza $f(x,y) - f(0,0)$ in un intorno di $(0,0)$. Se, ad esempio consideriamo i punti (x,y) appartenenti all'asse delle x, ovvero i punti della forma $(x,0)$, allora si ha che la differenza $f(x,y) - f(0,0) = x^4 - 2x^2$ che assume valori negativi in un intorno di $x = 0$. Se invece consideriamo i punti (x,y) appartenenti alla bisetrice del primo e del terzo quadrante, ovvero i punti della forma (x,x), allora si ha che la differenza $f(x,y) - f(0,0) = 4x^4$ assume valori positivi. Questo ci consente di concludere che (0,0) è un punto di sella, dato che in ogni intorno del punto stazionario $(0,0)$ esistono sia punti (x,y) tali che $f(x,y) > f(0,0)$ sia punti (x,y) tali che $f(x,y) < f(0,0)$.

5. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Notiamo che la funzione è definita nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Il

gradiente è

$$\nabla f(x,y) = \left(y\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, x\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

I punti in cui il gradiente si annulla, interni all'insieme di definizione della funzione, sono: $(0,0)$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. La matrice Hessiana $H_f(x,y)$è :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^3 y}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & -\frac{3xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{xy^3}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Nel punto stazionario $(0,0)$ abbiamo:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi $(0,0)$ è una sella.
In $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e in $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ la matrice Hessiana è definita negativa e quindi i due punti stazionari sono punti di massimo locale, mentre in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ la matrice Hessiana è definita positiva e i due punti sono di minimo locale.

6. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
Il vettore gradiente è $\nabla f(x,y) = \left(2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}, 2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\right)$.
I punti stazionari sono dunque l'origine $(0,0)$ e tutti i punti della circonferenza $x^2+y^2=1$. La matrice Hessiana in (0,0) è :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi (0,0) è un punto di minimo locale. Nei punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ la matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x^2 & -4xy \\ -4xy & -4y^2 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita negativa. Andando a studiare il comportamento della funzione $\rho \mapsto \rho^2 e^{-\rho^2}$ nelle vicinanze del valore $\rho = 1$ possiamo concludere che $\rho = 1$ è un punto di massimo locale e quindi tutti i opunti della circonferenza $x^2+y^2=1$ sono punti di massimo locale per la funzione f.

7. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2xe^{x-y} + (x^2 - 2y^2)e^{x-y}, -4ye^{x-y} - (x^2 - 2y^2)e^{x-y})$, che si annulla nei punti $(0,0)$ e $(-4,-2)$. La matrice Hessiana in (0,0) è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi (0,0) è una sella. La matrice Hessiana in (-4,-2) è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & -8e^{-2} \\ -8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

che è definita negativa, quindi (-4,-2) è un massimo locale.

8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
Il vettore gradiente è $\nabla f(x,y,z) = (2x - y + 1, 2y - x, 2z - 2)$, che si annulla in $(-2/3, -1/3, 1)$. La matrice Hessiana è

$$H_f(-2/3,-1/3,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando il criterio dei minori nord-ovest si vede che è definita positiva, quindi $(-2/3, -1/3, 1)$. è un punto di minimo locale.

9. $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1 + z^2)$
La funzione ha un unico punto stazionario in (1,0,0), che è un punto di minimo, in quanto la matrice Hessiana

$$H_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva.

10. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^2 - xy + z^2$
I punti stazionari sono $(0,0,0)$, $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, 0)$ e $(-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, 0)$. La Matrice Hessiana in (0,0,0) è

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi (0,0,0) è un punto di sella. La matrice Hessiana nei punti $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, 0)$ e $(-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, 0)$ è

$$H_f(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, 0) = H_f(-1/2\sqrt{2}, -1/2\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi tali punti sono di minimo locale.