

Esercizi su massimi e minimi assoluti e moltiplicatori di Lagrange

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - \frac{xy}{2}$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

5. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

6. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

7. Scomporre il numero positivo a in tre addendi non negativi in maniera tale che il loro prodotto sia massimo.
8. Se una corrente elettrica I scorre in un circuito elettrico di resistenza R , la quantità di calore emessa nell'unità di tempo è proporzionale a I^2R . Come si deve scomporre la corrente I in tre correnti I_1, I_2, I_3 con l'aiuto di tre conduttori di resistenza R_1, R_2, R_3 perchè la quantità di calore emesso sia minima?

Soluzioni

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

L'insieme A è il triangolo (pieno) di vertici $(0, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$. Dato che è un insieme chiuso e limitato, e la funzione f è continua, allora f ammette massimo e minimo assoluto su A .

- f è ovunque differenziabile (in quanto di classe C^1), quindi non ci sono punti singolari
- Calcoliamo i punti stazionari interni al triangolo, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione la coppia $(x, y) = (-1, -1)$, che è un punto interno al triangolo. Il valore di f in $(-1, -1)$ è -1 .

- Consideriamo ora il bordo dell'insieme A , costituito da tre segmenti (i tre lati del triangolo).

Sul segmento $x = 0$, $-3 \leq y \leq 0$ la funzione assume la forma

$$f(0, y) = y^2 + y$$

Il valore massimo viene assunto nel punto $(0, -3)$ e vale $f(0, -3) = 6$, il valore minimo viene assunto nel punto $(0, -1/2)$ e vale $f(0, -1/2) = -1/4$.

Sul segmento $y = 0$, $-3 \leq x \leq 0$ la funzione assume la forma

$$f(x, 0) = x^2 + x$$

Il valore massimo viene assunto nel punto $(-3, 0)$ e vale $f(-3, 0) = 6$, il valore minimo viene assunto nel punto $(-1/2, 0)$ e vale $f(-1/2, 0) = -1/4$.

Sul segmento $y = -3 - x$, $-3 \leq x \leq 0$ la funzione assume la forma

$$f(x, -3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$$

Il valore minimo viene assunto nel punto $(-3/2, -3/2)$ e vale $f(-3/2, -3/2) = -3/4$, il valore massimo viene assunto nel punto $(0, -3)$ e nel punto $(-3, 0)$ vale 6.

In conclusione il valore massimo di f è 6 e viene assunto nei punti $(0, -3)$ e $(-3, 0)$, mentre il valore minimo di f è -1 e viene assunto nel punto stazionario interno $(-1, -1)$.

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - \frac{xy}{2}$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

L'insieme A è l'ellisse (piena) di semiassi 2 e 1. A è un insieme chiuso e limitato, f è una funzione continua, quindi f ammette massimo e minimo assoluti su A .

- f è ovunque differenziabile (in quanto di classe C^1), quindi non ci sono punti singolari
- Calcoliamo i punti stazionari interni all'ellisse, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y/2 = 0 \\ 10y - x/2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione la coppia $(x, y) = (0, 0)$, che è un punto interno all'ellisse. Il valore di f in $(0, 0)$ è 0.

- Consideriamo ora il bordo dell'ellisse, ovvero l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 = 4\}$. Parametrizzando i punti dell'ellisse come $x(\theta) = 2 \cos \theta$, $y(\theta) = \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, abbiamo che la funzione f diviene

$$f(x(\theta), y(\theta)) = 4 \cos^2 \theta + 5 \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

che assume valore massimo per $\theta = 5\pi/8$ e in $\theta = 13\pi/8$, in cui la funzione vale $9/2 + \sqrt{2}/2$, mentre assume valore minimi per $\theta = \pi/8$ e in $\theta = 9\pi/8$, in cui la funzione vale $9/2 - \sqrt{2}/2$. Questi risultati potevano essere ottenuti anche utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Concludendo il minimo assoluto di f su A è 0 e viene assunto nel punto stazionario interno $(0,0)$, mentre il massimo assoluto di f su A è $9/2 + \sqrt{2}/2$ e viene assunto nei due punti del bordo $(2 \cos(5\pi/8), \sin(5\pi/8))$ e in $(2 \cos(13\pi/8), \sin(13\pi/8))$

3. Il valore minimo è 0 e viene assunto in $(0,1)$ e in $(1,0)$, mentre il valore massimo è $1/4$ e viene assunto in $(1/2, 1/2)$.
4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, per trovare gli estremi della funzione f nell'insieme descritto dal vincolo di uguaglianza $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

Il gradiente di $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ si annulla solo nell'origine $(0, 0, 0)$, che non appartiene all'insieme A . f e g sono di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, quindi il metodo è applicabile.

La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ -2 - 2\lambda y = 0 \\ 2 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni:

$$\lambda = 1/2, \quad x = 1, \quad y = -2, \quad z = 2$$

dove $f(1, -2, 2) = 9$, e

$$\lambda = -1/2, \quad x = -1, \quad y = 2, \quad z = -2$$

dove $f(-1, 2, -2) = -9$. Quindi 9 è il valore massimo e -9 è il valore minimo.

5. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 12, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Il valore massimo si assume in $(2, 4, 6)$ e vale $2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$, mentre il minimo si ottiene per $x = 0$ o per $y = 0$ o per $z = 0$ e vale 0.

6. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Il valore massimo è $3\sqrt{3}/2$ e si assume nel punto interno $(\pi/3, \pi/3)$, mentre il minimo è 0 e si assume nel punto $(0, 0)$.

7. Scomporre il numero positivo a in tre addendi non negativi in maniera tale che il loro prodotto sia massimo. Scriviamo a come somma di tre numeri positivi x, y, z :

$$a = x + y + z, \quad x > 0, y > 0, z > 0$$

e cerchiamo di massimizzare il prodotto xyz . Il problema equivale a cercare il valore massimo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ sull'insieme definito dal vincolo di uguaglianza $x + y + z - a = 0$. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - a)$$

risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = y = z = a/3$ e $f(a/3, a/3, a/3) = a^3/27$

8. Se una corrente elettrica I scorre in un circuito elettrico di resistenza R , la quantità di calore emessa nell'unità di tempo è proporzionale a $I^2 R$. Come si deve scomporre la corrente I in tre correnti I_1, I_2, I_3 con l'aiuto di tre conduttori di resistenza R_1, R_2, R_3 perchè la quantità di calore emesso sia minima?

Dobbiamo minimizzare la funzione $f(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$ sotto il vincolo $g(I_1, I_2, I_3) = 0$, con $g(I_1, I_2, I_3) = I_1 + I_2 + I_3 - I$. Impostando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo che

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3, \quad I_1 + I_2 + I_3 = I$$

Quindi

$$I_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} I,$$

$$I_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} I,$$

$$I_3 = \frac{R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} I$$