Esercizi su massimi e minimi locali

Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale o di sella delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$
2. $f(x, y) = (x-1)^2 - y^2$
3. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
4. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
5. $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
7. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

Soluzioni

1. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2(x-1), 2y)$, quindi $(1, 0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi il punto stazionario è un punto di minimo locale.

2. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2(x-1), -2y)$, quindi $(1, 0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi il punto stazionario è un punto di sella.

3. Il gradiente di f è $\nabla f(x, y) = (2x + y - 2, x + 2y - 1)$, quindi $(1, 0)$ è l'unico punto stazionario. La matrice Hessiana di f nel punto stazionario è

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi il punto stazionario è un punto di minimo locale.

4. Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 + 4x - 4y)$, quindi $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sono i tre punti stazionari. La matrice Hessiana di f in un generico punto di coordinate (x,y) è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Nei punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ la matrice Hessiana è :

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi i due punti stazionari sono punti di minimo locale.
Nel punto $(0,0)$ la matrice Hessiana è :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita negativa, quindi l'analisi della matrice Hessiana non permette di dire nulla sulla natura del punto stazionario. Andiamo ad analizzare il segno della differenza $f(x,y) - f(0,0)$ in un intorno di $(0,0)$. Se, ad esempio consideriamo i punti (x,y) appartenenti all'asse delle x, ovvero i punti della forma $(x,0)$, allora si ha che la differenza $f(x,y) - f(0,0) = x^4 - 2x^2$ che assume valori negativi in un intorno di $x = 0$. Se invece consideriamo i punti (x,y) appartenenti alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, ovvero i punti della forma (x,x), allora si ha che la differenza $f(x,y) - f(0,0) = 4x^4$ assume valori positivi. Questo ci consente di concludere che (0,0) è un punto di sella, dato che in ogni intorno del punto stazionario $(0,0)$ esistono sia punti (x,y) tali che $f(x,y) > f(0,0)$ sia punti (x,y) tali che $f(x,y) < f(0,0)$.

5. Notiamo che la funzione è definita nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Il gradiente è

$$\nabla f(x,y) = \left(y\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, x\sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right).$$

I punti in cui il gradiente si annulla, interni all'insieme di definizione della funzione, sono: $(0,0)$, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. La matrice Hessiana $H_f(x,y)$ è :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^3 y}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \\ \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} & -\frac{3xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \frac{xy^3}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Nel punto stazionario $(0,0)$ abbiamo:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi $(0,0)$ è una sella.
In $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e in $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ la matrice Hessiana è definita negativa e quindi i due punti stazionari sono punti di massimo locale, mentre in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ la matrice Hessiana è definita positiva e i due punti sono di minimo locale.

6. Il vettore gradiente è $\nabla f(x,y) = \Big(2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}, 2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}\Big)$. I punti stazionari sono dunque l'origine $(0,0)$ e tutti i punti della circonferenza $x^2+y^2=1$. La matrice Hessiana in (0,0) è :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, quindi (0,0) è un punto di minimo locale. Nei punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ la matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x^2 & -4xy \\ -4xy & -4y^2 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita negativa. Andando a studiare il comportamento della funzione $\rho \mapsto \rho^2 e^{-\rho^2}$ nelle vicinanze del valore $\rho = 1$ possiamo concludere che $\rho = 1$ è un punto di massimo locale e quindi tutti i punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ sono punti di massimo locale per la funzione f.

7. Il gradiente di f è $\nabla f(x,y) = (2xe^{x-y} + (x^2-2y^2)e^{x-y}, -4ye^{x-y} - (x^2-2y^2)e^{x-y})$, che si annulla nei punti $(0,0)$ e $(-4,-2)$. La matrice Hessiana in (0,0) è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

che è indefinita, quindi (0,0) è una sella. La matrice Hessiana in (-4,-2) è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & -8e^{-2} \\ -8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

che è definita negativa, quindi (-4,-2) è un massimo locale.

Esercizi su massimi e minimi assoluti e moltiplicatori di Lagrange

1. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}.$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - \frac{xy}{2}$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

3. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

4. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$$

nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Soluzioni

1. L'insieme A è il triangolo (pieno) di vertici $(0, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$. Dato che è un insieme chiuso e limitato, e la funzione f è continua, allora f ammette massimo e minimo assoluto su A.

   - f è ovunque differenziabile (in quanto di classe C^1), quindi non ci sono punti singolari.
   - Calcoliamo i punti stazionari interni al triangolo, risolvendo il sistema

     $$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

     che ha come soluzione la coppia $(x, y) = (-1, -1)$, che è un punto interno al triangolo. Il valore di f in $(-1, -1)$ è -1.

- Consideriamo ora il bordo dell'insieme A, costituito da tre segmenti (i tre lati del triangolo).
  Sul segmento $x = 0$, $-3 \le y \le 0$ la funzione assume la forma
  $$f(0, y) = y^2 + y.$$
  Il valore massimo viene raggiunto nel punto $(0, -3)$ e vale $f(0, -3) = 6$, il valore minimo viene raggiunto nel punto $(0, -1/2)$ e vale $f(0, -1/2) = -1/4$.
  Sul segmento $y = 0$, $-3 \le x \le 0$ la funzione assume la forma
  $$f(x, 0) = x^2 + x.$$
  Il valore massimo viene raggiunto nel punto $(-3, 0)$ e vale $f(-3, 0) = 6$, il valore minimo viene raggiunto nel punto $(-1/2, 0)$ e vale $f(-1/2, 0) = -1/4$.
  Sul segmento $y = -3 - x$, $-3 \le x \le 0$ la funzione assume la forma
  $$f(x, -3 - x) = 3x^2 + 9x + 6.$$
  Il valore minimo viene raggiunto nel punto $(-3/2, -3/2)$ e vale $f(-3/2, -3/2) = -3/4$, il valore massimo viene raggiunto nel punto $(0, -3)$ e nel punto $(-3, 0)$ vale 6.

In conclusione il valore massimo di f è 6 e viene raggiunto nei punti $(0, -3)$ e $(-3, 0)$, mentre il valore minimo di f è -1 e viene raggiunto nel punto stazionario interno $(-1, -1)$.

2. L'insieme A è l'ellisse (piena) di semiassi 2 e 1. A è un insieme chiuso e limitato, f è una funzione continua, quindi f ammette massimo e minimo assoluti su A.

   - f è ovunque differenziabile (in quanto di classe C^1), quindi non ci sono punti singolari.
   - Calcoliamo i punti stazionari interni all'ellisse, risolvendo il sistema
     $$\begin{cases} 2x - y/2 = 0 \\ 10y - x/2 = 0 \end{cases}$$
     che ha come soluzione la coppia $(x, y) = (0, 0)$, che è un punto interno all'ellisse. Il valore di f in $(0, 0)$ è 0.

- Consideriamo ora il bordo dell'ellisse, ovvero l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 = 4\}$. Parametrizzando i punti dell'ellisse come $x(\theta) = 2\cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, abbiamo che la funzione f diviene

  $$f(x(\theta), y(\theta)) = 4\cos^2\theta + 5\sin^2\theta - \cos\theta\sin\theta, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

  che ha massimo per $\theta = 5\pi/8$ e in $\theta = 13\pi/8$, in cui la funzione vale $9/2 + \sqrt{2}/2$, mentre in $\theta = \pi/8$ e in $\theta = 9\pi/8$ sono punti di minimo in cui la funzione vale $9/2 - \sqrt{2}/2$. Questi risultati potevano essere ottenuti anche utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Concludendo il minimo assoluto di f su A è 0 e viene raggiunto nel punto stazionario interno $(0, 0)$, mentre il massimo assoluto di f su A è $9/2 + \sqrt{2}/2$ e viene raggiunto nei due punti del bordo $(2\cos(5\pi/8), \sin(5\pi/8))$ e in $(2\cos(13\pi/8), \sin(13\pi/8))$.

3. Il valore minimo è 0 e viene raggiunto in (0,1) e in (1,0), mentre il valore massimo è $1/4$ e viene raggiunto in $(1/2, 1/2)$.

4. Il valore massimo è $3\sqrt{3}/2$ e si ottiene nel punto interno $(\pi/3, \pi/3)$, mentre il minimo è 0 e si ottiene nel punto (0,0).