

Campi, lavoro e potenziali

1. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$$

Calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo la curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = 2 \cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin(t)\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

2. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}.$$

Calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo la curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = 2 \cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \sin(t)\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin(t)\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

3. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dato da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}.$$

Calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo la linea retta congiungente i punti $(1,1,1)$ e $(1,0,0)$

4. Dopo aver verificato che sono irrotazionali (e definiti su un insieme semplicemente connesso di \mathbb{R}^3), calcolare il potenziale associato ai seguenti campi vettoriali

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + e^x)\mathbf{i} + (x + z + 4y^3)\mathbf{j} + (y - \sin(z))\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + e^y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + xe^y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{3}{2}\sqrt{z}\right)\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz \cos(xyz) + e^x(y^2 + z), xz \cos(xyz) + 2ye^x, xy \cos(xyz) + e^x)$

5. Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dato da

$$\mathbf{F}(x, y) = (4x - \alpha y)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$$

è conservativo? per tale valore di α calcolare un potenziale.

6. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

(a) Verificare che $\text{rot}\mathbf{F}(x, y) = (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo la circonferenza γ di centro $(0,0)$ e raggio 1

(c) Il campo \mathbf{F} è conservativo? Motivare la risposta

Soluzioni

1. Il campo F non è conservativo, infatti $\frac{\partial F_x}{\partial z} \neq \frac{\partial F_z}{\partial x}$, quindi per calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo γ è necessario calcolare l'integrale di linea di seconda specie $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds$ dato da

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((2 \cos(t) + \sqrt{2} \sin(t))\mathbf{j} + (2 \cos(t) + \sqrt{2} \sin(t))\mathbf{k}) \cdot \\ &\quad (-2 \sin(t)\mathbf{i} + \sqrt{2} \cos(t)\mathbf{j} + \sqrt{2} \cos(t)\mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos(t)(\sqrt{2} \cos(t) + \sin(t)) dt = 4\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

2. Il campo \mathbf{F} è conservativo, infatti si verifica facilmente che $\text{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 0)$. La curva γ è chiusa, infatti $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (2, 0, 0)$, quindi, senza dover calcolare un potenziale U , possiamo concludere che $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot ds = 0$
3. Il campo \mathbf{F} è conservativo, infatti si verifica facilmente che $\text{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 0)$. Il potenziale U associato al campo \mathbf{F} è dato da $U(x, y, z) = x^2/2 + xz - y^2/2 - yz + k$, dove k è una costante arbitraria. Il lavoro di f lungo una qualsiasi curva congiungente i punti $(1,1,1)$ e $(1,0,0)$ è dato da $U(1, 1, 1) - U(1, 0, 0) = k - 1/2 - k = -1/2$
4. (a) $U(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + k$
 (b) $U(x, y, z) = xy + yz + \cos(z) + e^x + y^4 + k$
 (c) $U(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2) + xe^y + z^{3/2}$
 (d) $U(x, y, z) = \sin(xyz) + e^x(y^2 + z)$
5. Il campo \mathbf{F} è definito su tutto il piano \mathbb{R}^2 , quindi su un insieme semplicemente connesso. Il rotore di \mathbf{F} è il vettore

$$\text{rot}\mathbf{F} = (-5 + \alpha)\mathbf{k}$$

Il campo è irrotazionale, quindi conservativo, se $(\alpha - 5) = 0$, ovvero $\alpha = 5$. Il campo \mathbf{F} diviene

$$\mathbf{F}(x, y) = (4x - 5y)\mathbf{i} + (3y - 5x)\mathbf{j}$$

Il potenziale $U(x, y)$ è dato da: $U(x, y) = 2x^2 - 5xy + \frac{3}{2}y^2 + k$, dove k è una costante arbitraria.

6. (a) $\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$
- (b) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$
- (c) Il campo \mathbf{F} non è conservativo perché il suo lavoro lungo la curva chiusa γ è non nullo. Questo non è in contrasto con il fatto che $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0)$ sull'insieme di definizione del campo \mathbf{F} , in quanto tale insieme non è semplicemente connesso.