Calcolo delle probabilità e calcolo combinatorio

1. La roulette ha 37 risultati possibili, numerati da 0 a 36. Supponendo che ciascun risultato h auguale probabilità di verificarsi, qual è la probabilità che
   - esca un numero dispari
   - esca un numero maggiore (strettamente) di 20
   - esca un numero minore o uguale a 6
2. Lanciando tre monete non truccate, qual è la probabilità di ottenere 3 teste?
3. Se le monete sono truccate, in modo tale che la probabilità che esca testa è pari a 2/3, mentre la probabilità che esca croce è pari a 1/3, qual è la probabilità di ottenere 3 teste lanciando tre monete
4. Tirando un dado a sei facce non truccato una volta e due monete non truccate, qual è la probabilità di fare due teste e un 3?
5. Tirando un dado a sei facce non truccato una volta e sei monete non truccate, qual è la probabilità di fare tante teste quanto indicato dal dado?
6. Una popolazione di facoceri può avere zanne lunghe o corte, e pelo lungo o corto. Sapendo che il 12 % della popolazione ha zanne e pelo lungo, il 32% della popolazione ha popolazione ha zanne lunghe e pelo corto e il 20% ha zanne corte e pelo lungo, qual è la probabilità che un facocero preso a caso abbia ilo pelo corto?
7. Un fascio di protoni irradia due strati di materiali diversi. La probabilità che un protone venga assorbito dal primo strato e del 12%, mentre la probabilità che (dopo essere passato attraverso il primo strato) sia assorbito dal secondo è del 6%. Qual è la probabilità che la particella attraversi entrambi gli strati?
8. Due fabbriche producono lo stesso tipo di lampadina. La prima produce il 3% di lampadine difettose, mentre la seconda produce il 4% di lampadine difettose. Supponendo che prendendo una lampadina a caso, la probabilità che sia prodotta nella prima fabbrica sia pari a 1/2, se una lampadina presa a caso è difettosa , qual è la probabilità che sia prodotta nella prima fabbrica?

Soluzioni

1. Supponendo che ciascun risultato ha uguale probabilità di verificarsi la probabilità di un evento è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili. Dato che il numero di casi possibili è 37, allora la probabilità che

   - esca un numero dispari è 18/37
   - esca un numero maggiore (strettamente) di 20 è 16/37
   - esca un numero minore o uguale a 6 è 7/37

2. Supponendo che le monete non sono truccate, la probabilità può essere calcolata comme il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, quindi $1/2^3 = 1/8$.

3. Gli eventi A_1=lanciando la prima moneta esce testa, A_2=lanciando la seconda moneta esce testa e A_3=lanciando la terza moneta esce testa sono indipendenti, quondi l probsabilità che si verifichino contemporaneamente è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

   $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

4. Il numero totale dei casi possibili è $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ (numero di possibili risultati del dado)$\cdot$(numero di possibili risultati della prima moneta)$\cdot$(numero di possibili risultati della seconda moneta). Tra questi c'e un unico risultato con le caratteristiche richieste (due teste e un 3). La probabilità di tale evento è dunque 1/24.

5. Il numero totale dei casi possibili è $6 \cdot 2^6 = 384$. Il numero di casi possibili è

   $$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63,$$

   dove:

   - $\binom{6}{1}$ è il numero di casi in cui esce 1 e una sola testa
   - $\binom{6}{2}$ è il numero di casi in cui esce 2 e due teste
   - $\binom{6}{3}$ è il numero di casi in cui esce 3 e 3 teste
   - $\binom{6}{4}$ è il numero di casi in cui esce 4 e 4 teste
   - $\binom{6}{5}$ è il numero di casi in cui esce 5 e 5 teste

- $\binom{6}{6}$ è il numero di casi in cui esce 6 e 6 teste

  Quindi la probabilità è 63/384.

6. Sia Ω l'insieme di tutti i facoceri e P la distribuzione di probabilità uniforme su Ω. Siano A l'insieme dei facoceri con il pelo corto, B_1 l'insieme dei facoceri con le zanne lunghe e B_2 l'insieme dei facoceri con le zanne corte. Allora abbiamo che $\Omega = B_1 \cup B_2$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, quindi

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2),$$

   dove $P(A \cap B_1) = 0.32$, mentre $P(A \cap B_2) = 1 - 0.12 - 0.32 - 0.2 = 0.36$. Quindi $P(A) = 0.68$

7. Sia A l'evento la particella è assorbita dal primo strato e sia B l'evento - la particella è assorbita dal secondo strato. Dato che $B \cap A = \emptyset$ allora la Probabilità che la particella venga assorbita dal primo o dal secondo strato è data da

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.12 + 0.06 \cdot 0.88 = 0.1728$$

   Quindi la probabilità che il protone non venga assorbito è $1 - 0.1728 = 0.8272$.

8. Siano A_1 l'evento la lampadina è prodotta nella prima fabbrica,A_2 l'evento la lampadina è prodotta nella seconda fabbrica e B l'evento la lampadina è difettosa. Vogliamo calcolare la probabilità condizionata $P(A_1|B)$. Sappiamo che $P(B|A_1) = 0.03$, $P(B|A_2) = 0.04$ e che $P(A_1) = 1/2$. Usando la formula di Bayes:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.03 \cdot 0.5}{P(B)}$$

   Serve $P(B)$, che calcoliamo come:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0.03 \cdot 0.5 + 0.04 \cdot 0.5$$

   Quindi $P(A_1|B) = 3/7$