Analisi Matematica 2
Soluzioni alla prova intermedia (7/11/2014)

Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione $f(x,y) = A\log(A + x^2 + y^2) - xy$ [$A = 2$ o $A = 4$].

- Si calcolino i punti stazionari di f e si determini se sono punti di massimo locale, di minimo locale o di sella.
- Si determinino il massimo ed il minimo assoluto di f sul segmento di estremi $(0,0)$ e $(\epsilon 1, -1)$ [$\epsilon = -1$ o $\epsilon = +1$].

Soluzione. Equazioni per punti critici:

$$\begin{aligned} 0 = \partial_x f &= \frac{2Ax}{A + x^2 + y^2} - y & \Longrightarrow \quad & \frac{2Axy}{A + x^2 + y^2} - y^2 = 0 \\ 0 = \partial_y f &= \frac{2Ay}{A + x^2 + y^2} - x & \Longrightarrow \quad & \frac{2Axy}{A + x^2 + y^2} - x^2 = 0 \end{aligned}$$

I punti critici devono soddisfare $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = +y \vee x = -y$. Se $x = y$:

$$\frac{2Ax}{A + x^2 + x^2} - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(A - 2x^2)}{A + 2x^2} = 0.$$

Dunque, $x = 0 \vee x = +\sqrt{A/2} \vee x = -\sqrt{A/2}$. Se $x = -y$:

$$\frac{2Ax}{A + x^2 + x^2} + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(3A + 2x^2)}{A + 2x^2} = 0.$$

Dunque, $x = 0$. Le soluzioni possibili sono

(x,y):	$(0,0)$	$(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2})$	$(-\sqrt{A/2}, -\sqrt{A/2})$
$A = 2$:	$(0,0)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
$A = 4$:	$(0,0)$	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Le matrice Hessiane, i minori principali ed i caratteri dei punti critici sono

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{2A(A+y^2-x^2)}{(A+x^2+y^2)^2} & -\frac{4Axy}{(A+x^2+y^2)^2} - 1 \\ \frac{2A(A+x^2-y^2)}{(A+x^2+y^2)^2} & -\frac{4Axy}{(A+x^2+y^2)^2} - 1 \end{pmatrix}, \\ H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} H^{(1)} = 2 > 0 \\ H^{(2)} = 3 > 0 \end{matrix} \quad \text{(minimo)}, \\ H_f\left(\pm\sqrt{\frac{A}{2}}, \pm\sqrt{\frac{A}{2}}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \begin{matrix} H^{(1)} = \frac{1}{2} > 0 \\ H^{(2)} = -\frac{8}{4} < 0 \end{matrix} \quad \text{(sella)}. \end{aligned}$$

Il segmento di estremi $(0,0)$ e $(\epsilon 1, -1)$ è parametrizzato come $(x(t), y(t)) = (\epsilon t, -t)$ e la funzione ad ottimizzare diventa $g(t) = f(x(t), y(t)) = A\log(A + 2t^2) + \epsilon t^2$. La condizione per i punti critici sul segmento è

$$0 = g'(t) = \frac{4At}{A + 2t^2} + 2\epsilon t = \frac{2t((2+\epsilon)A + 2\epsilon t^2)}{A + 2t^2}.$$

Cerchiamo delle soluzioni interne al dominio, dunque con $t \in (0,1)$. Se $(A, \epsilon) = (2, -1)$, $t = 0 \vee t = \pm 1$, e se $(A, \epsilon) = (4, 1)$, $t = 0$. In ogni caso, non ci sono dei punti critici interni al dominio. Allora, per trovare il massimo e minimo locali, basta controllare i punti del bordo:

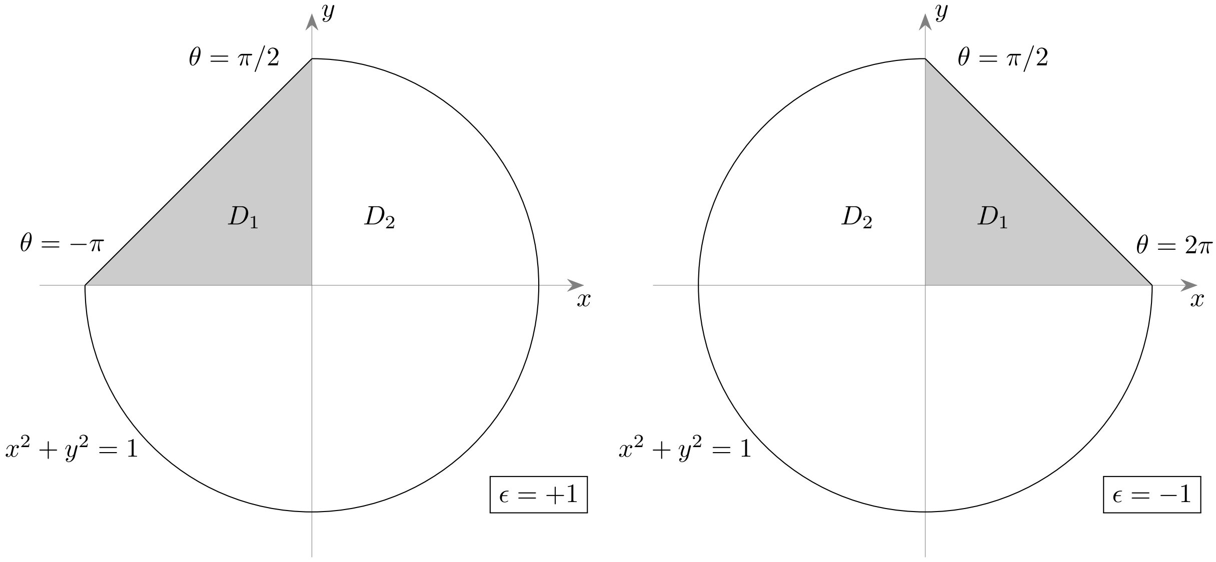
(A, ϵ):	$g(0) = A\log A$	$g(1) = A\log(A+2) + \epsilon$
$(2, -1)$:	$2\log 2 \approx 1.4$ (minimo)	$2\log 4 - 1 \approx 1.8$ (massimo)
$(4, 1)$:	$4\log 4 \approx 5.5$ (minimo)	$2\log 6 - 1 \approx 6.2$ (massimo)

Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri l'insieme $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ compreso fra i piani di equazione $z = 0$ e $z = \epsilon x - y + 1$ [$\epsilon = +1$ o $\epsilon = -1$] e interno al cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \epsilon x - y + 1\}$$

- Si rappresenti graficamente la proiezione di Ω sul piano xy.
- Si calcoli il volume di Ω.

Soluzione. Ecco il grafico della proiezione di Ω:



Calcoliamo il volume di Ω nel caso $\epsilon = +1$. Poiché i due casi sone legati per mezzo di una riflessione, $x \mapsto -x$, il volume nel caso $\epsilon = -1$ è uguale.

La regione Ω è z-semplice. Allora, possiamo calcolare il volume per fili. Conviene spezzare la proiezione D di Ω in due pezzi, $D = D_1 \cup D_2$. Per D_1 potremo usare le coordinate cartesianie. Per D_2 è meglio usare le coordinate polari, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

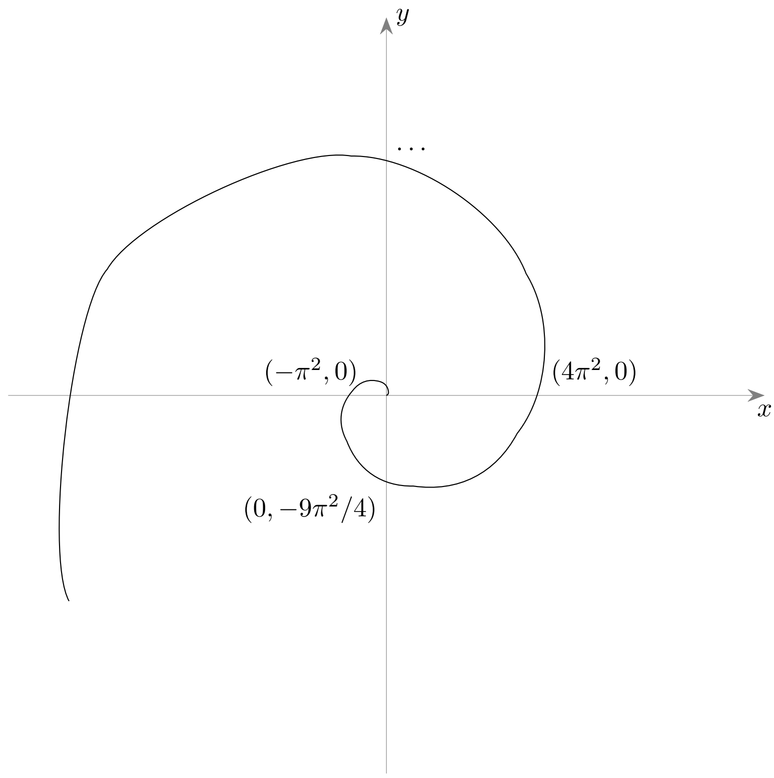
$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \\
&= \iint_D \left(\int_0^{x-y+1} dz\right) dy\,dz \\
&= \iint_{D_2} (x-y+1)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x-y+1)\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} dy\,(x-y+1) + \int_{-\pi}^{\pi/2} d\theta \int_0^1 dr\, r(r\cos\theta - r\sin\theta + 1) \\
&= \int_{-1}^0 dx \left[\frac{x^2}{2} - yx + x\right]_0^{x+1} + \int_{-\pi}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{r^3}{3}\cos\theta - \frac{r^3}{3}\sin\theta + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \int_{-1}^0 dx \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) + \int_{-\pi}^{\pi/2} d\theta \left(\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{2}\right) \\
&= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{5}{6} + \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 (7 punti)
Si consideri la curva piana $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ descritta in forma parametrica da:

$$\alpha(\theta) = \left(\theta^2\cos\theta, \theta^2\sin\theta\right) \quad \text{o} \quad \alpha(\theta) = \left(\theta^2\sin\theta, \theta^2\cos\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- Rappresentare graficamente la curva γ.
- Calcolare la lunghezza di γ.
- Calcolare, punto per punto, la curvatura.

Soluzione. Trattiamo solo il primo caso, perché i due caso sono legati dalla riflezione $(x, y) \mapsto (y, x)$. Ecco il grafico della curva:



La lunghezza L è uguale all'integrale, rispetto al parametro, della norma del vettore tangente

$$T(\theta) = \alpha'(\theta) = 2\theta(\cos\theta, \sin\theta) + \theta^2(-\sin\theta, \cos\theta).$$

Notate che i versori $(\cos\theta, \sin\theta)$ e $(-\sin\theta, \cos\theta)$ sono ortogonali. Dunque,

$$\begin{aligned}
\|T(\theta)\| &= \sqrt{(2\theta)^2 + \theta^4} = \theta\sqrt{4+\theta^2}, \\
L &= \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{4+\theta^2}\, d\theta \\
&= \left[\frac{1}{3}(4+\theta^2)^{3/2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{8}{3}\left((1+\pi^2)^{3/2} - 1\right).
\end{aligned}$$

La curvatura si calcola usando la prima e la seconda derivata, $\alpha'(\theta)$ e $\alpha''(\theta)$. La derivata prima (e anche la sua norma) erano già state calcolate sopra, mentre:

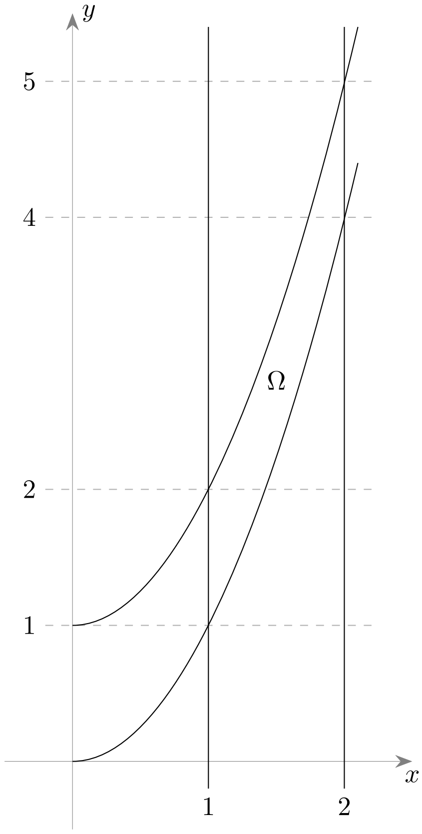
$$\begin{aligned}
\alpha''(\theta) &= (2-\theta^2)(\cos\theta, \sin\theta) + 4\theta(-\sin\theta, \cos\theta), \\
\|\alpha'(\theta) \wedge \alpha''(\theta)\| &= (\theta^4 + 6\theta^2) = \theta^2(6+\theta^2), \\
\kappa &= \frac{\|\alpha'(\theta) \wedge \alpha''(\theta)\|}{\|\alpha'(\theta)\|^3} \\
&= \frac{\theta^2(6+\theta^2)}{\theta^3(4+\theta^2)^{3/2}} = \frac{(6+\theta^2)}{\theta(4+\theta^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

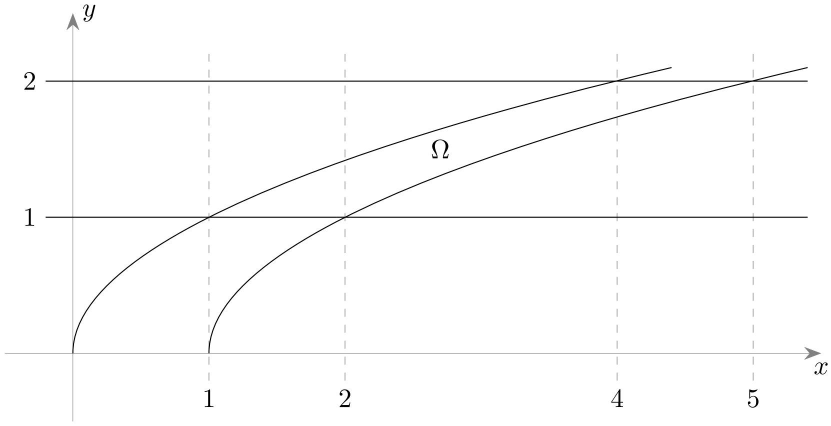
Esercizio 4 (7 punti)
Si consideri l'insieme $\Omega \subset \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \le y \le 1 + x^2, 1 \le x \le 2\} \\
\text{o}\quad &\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \le y \le 1 + x^2, 1 \le x \le 2\}
\end{aligned}$$

- Si rappresenti graficamente Ω.
- Si calcoli l'area di Ω.
- Si determini un cambiamento di variabili che trasformi Ω in un rettangolo e si stabilisca se tale trasformazione è un diffeomorfismo motivando la risposta. Si calcoli inoltre il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione.

Soluzione. Ecco il grafico delle due versione di Ω:





Trattiamo solo il primo caso, perché l'altro è completamente analogo, dopo la riflessione $(x, y) \mapsto (y, x)$. L'area di Ω si calcola usando il seguendo integrale

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 dx \int_{x^2}^{1+x^2} dy \\ &= \int_1^2 dx \, ((1+x^2) - x^2) = \int_1^2 dx \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Prendiamo $u = x$ e $v = y - x^2$ come nuove coordinate, o equivalentemente $x = u$ e $y = v + u^2$. In queste coordinate, il dominio Ω diventa il rettangolo $[0, 1] \times [0, 1]$. Il jacobiano è dato dall'espressione

$$dx\,dy = J(u, v)\,du\,dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{vmatrix} du\,dv = du\,dv. \tag{1}$$

La trasformazione tra (x, y) e (u, v) è un diffeomorfismo perché è differenziabile, e anche la transformazine inversa è differenziabile.