Soluzioni Fac-simile 1

Esercizio 1 (8 punti)

Si determinino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ sull'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$.

Soluzione: I punti candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluto di f su Ω sono

- I punti interni a Ω in cui $\nabla f = (0,0)$. In questo caso i punti appartenenti all'asse dell x e all'asse delle y, in cui $f(x,0) = f(0,y) = 0$.
- I punti sul bordo di Ω:

  $$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$$

  Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, con Lagrangiana $Ł(x,y,\lambda) = x^2y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - 1)$ otteniamo i punti $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$ in cui $f(0,1) = f(0,-1) = f(1,0) = f(-1,0) = 0$, e i punti $(-(2)^{-1/4}, -(2)^{-1/4})$, $((2)^{-1/4}, -(2)^{-1/4})$,$(-(2)^{-1/4}, +(2)^{-1/4})$,$(+(2)^{-1/4}, +(2)^{-1/4})$, in cui f vale $1/2$

Conludendo, i punti di massimo assoluto di f su Ω sono $(-(2)^{-1/4}, -(2)^{-1/4})$, $((2)^{-1/4}, -(2)^{-1/4})$,$(-(2)^{-1/4}, +(2)^{-1/4})$,$(+(2)^{-1/4}, +(2)^{-1/4})$, in cui f vale $1/2$, mentre i punti di minimo assoluto di f su Ω sono i punti della forma (x,o) con $-1 \leq x \leq 1$ e i punti della forma $(0,y)$ con $-1 \leq y \leq 1$ in cui f vale 0.

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcoli l'integrale $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$ e Ω è il cono

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} \leq z \leq 1\}$$

Soluzione: Integrando per fili:

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int_D \left(\int_{\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}}^1 z(x^2+y^2)dz\right) dxdy$$
$$\frac{1}{2}\int\int_D (x^2+y^2)(1 - \frac{x^2}{4} + y^2)dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$. Utilizzando le coordinate ellittiche nel piano $x = 2\rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int\int_D (x^2+y^2)(1-\frac{x^2}{4}+y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4\cos^2\theta+\sin^2\theta)\rho^2(1-\rho^2)2\rho d\rho d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)d\rho = \frac{5\pi}{12}$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si consideri la funzione $f(x,y) = ye^x$.
Si determini l'insieme di definizione della funzione e si discuta la continuità e la differenziabilità .
Si rappresentino gli insiemi di livello della funzione f.
Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,2,2)$.
Si scriva il campo di vettori $\nabla f(x,y)$ e lo si rappresenti con un disegno qualitativo lungo le rette $y=0$, $y=1$ e $y=-1$.

Soluzione: La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Su tale insieme è continua in quanto prodotto di funzioni continue. Dato che le due derivate parziali di f:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = ye^x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = e^x,$$

sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$, abbiamo che f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Gli insiemi di livello I_C di f sono

$$I_C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ye^x = C\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = Ce^{-x}\}$$

Quindi l'insieme di livello I_C è il grafico della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita fa $g(x) = Ce^{-x}$. La figura 1 mostra talicurve nei casi $c=1$, $c=2$ e $c=-1$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0,2,2)$ è :

$$z = f(0,2) + \nabla f(0,2)\cdot(x,y-2) = 2 + (2,1)\cdot(x,y-2) = 2x+y$$

Il campo di vettori $\nabla f(x,y) = (ye^x, e^x)$ sulla retta $y=0$ assume la forma $\nabla f(x,0) = (0,e^x)$, sulla retta $y=1$ assume la forma $\nabla f(x,1) = (e^x,e^x)$ e sulla retta $y=-1$ assume la forma $\nabla f(x,-1) = (-e^x,e^x)$ (si veda la figura 2)

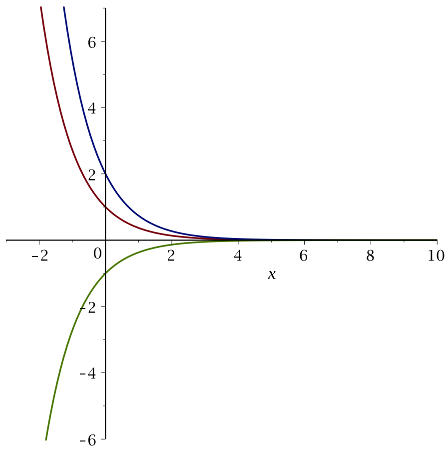

Figura 1: Alcuni insiemi di livello della funzione $f(x, y) = ye^x$

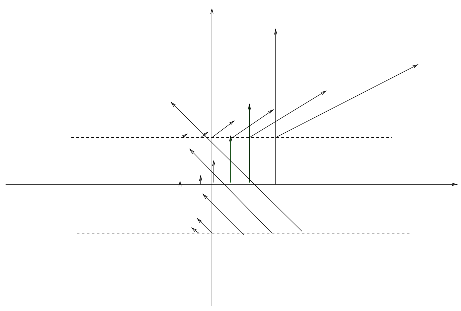

Figura 2: rappresentazione qualitativa del campo di vettori $\nabla f(x, y)$ lungo le rette $y = 0$, $y = 1$ e $y = -1$

Esercizio 4 (7 punti)
Si consideri la curva piana γ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (3 + t\cos t, -t\sin t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura.
Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 9$.

Soluzione: Per calcolare T N e K, riguardiamo γ come una curva nello spazio che giace sul piano xy, di parametrizzazione $\alpha(t) = (3+t\cos t, -t\sin t, 0)$. Abbiamo

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t, -\sin t - t\cos t, 0), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

$$T(t) = \frac{(\cos t - t\sin t, -\sin t - t\cos t, o)}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\alpha'(t) = (-2\sin t - t\cos t, -2\cos t + t\sin t, 0), \quad \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, -2 - t^2)$$

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 2 + t^2, \qquad K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = (0, 0, -1),$$

$$N(t) = B(t) \wedge T(t) = \frac{(-\sin t - t\cos t, -\cos t + t\sin t, 0)}{\sqrt{1+t^2}}$$

Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 9$ è dato da:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f ds &= \int_0^\pi t^2\sqrt{1+t^2}dt \\ &= \frac{\pi^3}{4}\sqrt{\pi^2+1} + \frac{\pi}{8}\sqrt{\pi^2+1} - \frac{1}{8}\log\left(\frac{\pi + \sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\right) - \frac{1}{8}\log 2 - \frac{1}{8}\log\pi\end{aligned}$$