Soluzioni Fac-simile 1

Esercizio 1 (8 punti)

Studiare i punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{3x^3+2xy^2-12xy}$.
Si determinino il massimo ed il minimo assoluto di f sul segmento $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ x \in [0,1]\}$

Soluzione: In punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{3x^3+2xy^2-12xy}(9x^2+2y^2-12y) = 0 \\ e^{3x^3+2xy^2-12xy}(4xy-12x) = 0 \end{cases}$$

Dato che $e^{3x^3+2xy^2-12xy} > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le soluzioni del sistema precedente sono tutte e sole le soluzioni di

$$\begin{cases} 9x^2+2y^2-12y = 0 \\ 4xy-12x = 0 \end{cases}$$

cioé i punti $(0,0)$, $(0,6)$, $(\sqrt{2},3)$, $(-\sqrt{2},3)$.

Nel punto $(0,0)$ la matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$ che è indefinita, quindi $(0,0)$ è un punto di sella.
Nel punto $(0,6)$ la matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ che è indefinita, quindi $(0,6)$ è un punto di sella.
Nel punto $(\sqrt{2},3)$ la matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} 18\sqrt{2}e^{-12\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2}e^{-12\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ che è definita positiva, quindi $(\sqrt{2},3)$ è un punto di minimo locale.
Nel punto $(-\sqrt{2},3)$ la matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} -18\sqrt{2}e^{-12\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -4\sqrt{2}e^{-12\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ che è definita negativa, quindi $(-\sqrt{2},3)$ è un punto di massimo locale.

Per determinare il massimo ed il minimo assoluto di f sul segmento $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ x \in [0,1]\}$, studiamo a funzione f ristretta a tale segmento, ovvero la funzione

$$f(x,x) = e^{5x^3-12x^2}, \qquad x \in [0,1].$$

Abbiamo che $\frac{d}{dx}f(x,x) = e^{5x^3-12x^2}(15x^2-24x)$. La derivata prima si annulla quindi in $x = 0$, dove $f(0,0) = 1$ e in $x = 24/15$, ma tale valore è esterno all'intervallo $[0,1]$ e quindi non lo prendiamo in considerazione. Nei punti estremi dell'intervallo, in $x = 0$ e in $x = 1$ la funzione vale $f(0,0) = 1$ e $f(1,1) = e^{-7}$. Il punto di minimo per f su γ è quindi $(1,1)$ dove $f = e^{-7}$, mentre il punto di massimo per f su γ è $(0,0)$ dove $f = 1$.

Esercizio 2 (8 punti)

Si consideri l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + (y-1)^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - y, 0 \leq z \leq 2 + y\},$$

ovvero la parte del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$ al di sopra del piano $z = 0$ e al di sotto dei piani $z = 4 - y$ e $z = 2 + y$.

1. Si rappresentino le proiezioni di E sui piani coordinati xy, xz e yz.
2. Si fornisca una parametrizzazione della retta intersezione tra i piani $z = 4 - y$ e $z = 2 + y$. Si Rappresenti graficamente la proiezione di tale retta sul piano xy
3. Si calcoli il volume di E

Soluzione: Indichiamo con E_{xy}, E_{xz} ed E_{yz} le proiezioni di E sui tre piani coordinati:

- $E_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 2, 0 \leq 4 - y, 0 \leq 2 + y\}$ è il cerchio di centro (0,1) e raggio $\sqrt{2}$.
- $E_{xz} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 2, z \leq 3\}$ è il rettangolo di vertici $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 3)$, $(\sqrt{2}, 3)$, $(\sqrt{2}, 0)$.
- $E_{yz} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \sqrt{2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2}, 0 \leq z \leq 4 - y, 0 \leq z \leq 2 + y\}$ è il poligono di vertici $(1 - \sqrt{2}, 0)$, $(1 + \sqrt{2}, 0)$, $(1 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$, $(1, 3)$, $(1 - \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2})$.

La retta intersezione tra i piani $z = 4 - y$ e $z = 2 + y$ è parametrizzabile come:

$$\alpha(t) = (t, 1, 3), \qquad t \in \mathbb{R}$$

. La proiezione di tale retta sul piano xy ha equazione $y = 1$ ed è rappresentata in figura 4

Il volume di E può essere calcolato integrando per fili nel seguente modo:

$$\int\int\int_E dxdydz = \int\int_{D_1} \left(\int_0^{4-y} dz \right) dxdy + \int\int_{D_2} \left(\int_0^{2+y} dz \right) dxdy$$

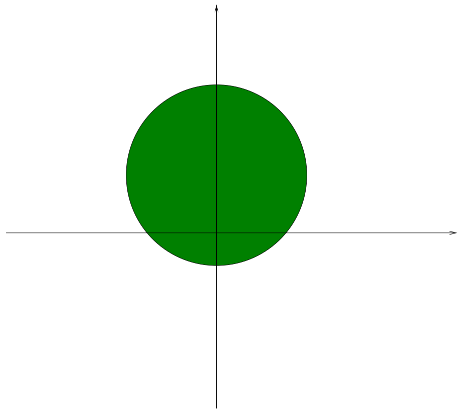

Figura 1: La proiezione di E sul piano xy

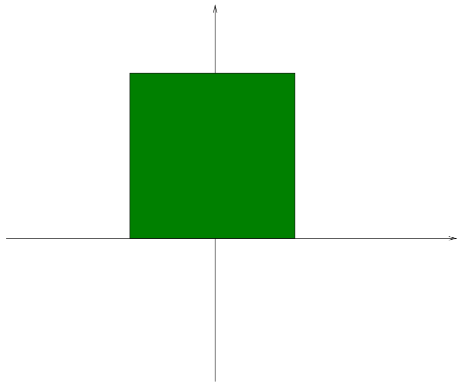

Figura 2: La proiezione di E sul piano xz

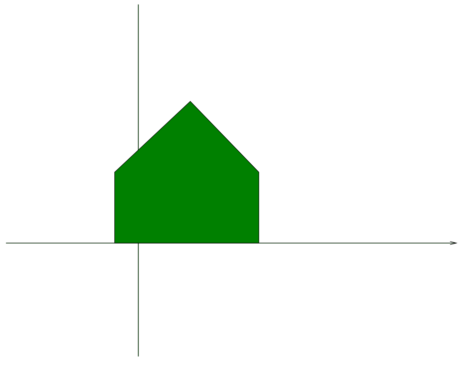

Figura 3: La proiezione di E sul piano yz

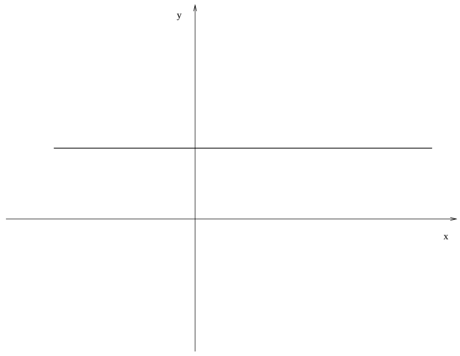

Figura 4: La retta $y = 1$

dove $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \leq 2, y \geq 1\}$ e $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \leq 2, y \leq 1\}$ e $E = D_1 \cup D_2$.

$$\int\int_{D_1} \left(\int_0^{4-y} dz \right) dxdy = \int\int_{D_1} (4-y) dxdy$$
$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} (3 - \rho \sin\theta)\rho d\rho d\theta = 3\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int\int_{D_2} \left(\int_0^{2+y} dz \right) dxdy = \int\int_{D_2} (2+y) dxdy$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi}^{2\pi} (3 + \rho \sin\theta)\rho d\rho d\theta = 3\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Quindi $\int\int\int_E dxdydz = 6\pi - \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma f\, ds$, dove γ è la curva di parametrizzazione

$$\alpha(\theta) = (\cos(2\theta)\cos\theta, \cos(2\theta)\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

e $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Soluzione:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} |\cos(2\theta)| \sqrt{\cos^2(2\theta) + 4\sin^2(2\theta)} d\theta$$

uitlizzando la sostituzione $2\theta \equiv u$ l'integrale diviene

$$\int_\gamma f\, ds = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} |\cos(u)|\sqrt{\cos^2(u) + 4\sin^2(u)}du$$
$$= \int_0^{2\pi} |\cos(u)|\sqrt{\cos^2(u) + 4\sin^2(u)}du = 4\int_0^{\pi/2} \cos(u)\sqrt{\cos^2(u) + 4\sin^2(u)}du$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \cos(u)\sqrt{1 + 3\sin^2(u)}du$$
$$= 4\left(\frac{1}{2}\sin(u)\sqrt{1 + 3\sin(u)^2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\,\mathrm{arcsinh}(\sqrt{3}\sin(x))\right)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= 4 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\log(2 + \sqrt{3})$$

Esercizio 4 (7 punti)
Si determinini in quale punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con

$$f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2 - 2x + 5y$$

il piano tangente è ortogonale alla retta congiungente l'origine $(0, 0, 0)$ con il punto di coordinate $(-3, 8, -1)$.

Il vettore che dà la direzione della retta congiungente l'origine $(0, 0, 0)$ con il punto di coordinate $(-3, 8, -1)$ è il vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1) - (0, 0, 0) = (-3, 8, -1)$. Il piano tangente al grafico della funzione f nel punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \tag{1}$$

Ricordiamo che l'equazione di un piano ortogonale ad un vettore $\mathbf{N} = (a, b, c)$ è :

$$ax + by + cz = d$$

D'altra parte l'equazione (1) può essere scritta come:

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y + z = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 \tag{2}$$

Questa forma mette in evidenza che il piano è ortogonale al vettore

$$\Big(- \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\Big)$$

L'ortogonalità fra il piano descritto dall'equazione (2) e la retta diretta nella direzione del vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1)$ si ottiene se il vettore $\Big(- \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, 1\Big)$ è proporzionale al vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1)$, quindi se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\Big(- \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1\Big) = \lambda(-3, 8, -1)$$

ovvero

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= -3\lambda \\ -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= 8\lambda \\ 1 &= -\lambda \end{aligned} \tag{3}$$

Dato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 10x + 3y - 2 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 3x + 2y + 5 \end{aligned}$$

imponiamo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite λ, x_0, y_0:

$$\begin{aligned} 10x_0 + 3y_0 - 2 &= 3\lambda \\ 3x_0 + 2y_0 + 5 &= -8\lambda \\ 1 &= -\lambda \end{aligned} \tag{4}$$

Quindi:

$$\lambda = -1, \qquad x_0 = -1, \qquad y_0 = 3$$