Soluzioni seconda prova in itinere del 14 dicembre 2015

Esercizio 1 Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ottenuta dalla rotazione attorno all'asse y della curva γ giacente sul piano yz, grafico della funzione $z = y^3$, con $y \in [1, 2]$.

1. Fornire una parametrizzazione di Σ.
2. Ricavare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto di coordinate $(0, 3/2, 27/8)$,
3. Calcolare, utilizzando la parametrizzazione ricavata al punto 1, il flusso attraverso Σ del campo vettoriale $F(x, y, z) = (2x, z, y)$, scegliendo l'orientazione di Σ tale per cui il versore normale $\hat{n}$ soddisfa la diseguaglianza $\hat{n} \cdot \hat{e}_y \geq 0$.
4. Calcolare la stessa quantità utilizzando il teorema della divergenza

Soluzione:

1. La superficie Σ puo' essere parametrizzata tramite la funzione $r : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definita da:
$$r(t, \theta) = (t^3 \sin\theta, t, t^3 \cos\theta), \qquad t \in [1, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$
2. imponendo $r(t, \theta) = (0, 3/2, 27/8)$, otteniamo i valori dei parametri (t, θ) corrispondenti al punto $(0, 3/2, 27/8)$, cioé $(t, \theta) = (3/2, 0)$. Il vettore ortogonale alla superficie dato da:
$$N(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial t} r(t, \theta) \wedge \frac{\partial}{\partial \theta} r(t, \theta) = (-t^3 \sin\theta, 3t^5, -t^3 \cos\theta)$$
in $(t, \theta) = (3/2, 0)$ vale $N(3/2, 0) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 (0, 27/4, -1)$. L'equazione del piano passante per il punto $(0, 3/2, 27/8)$ e ortogonale al vettore $N(3/2, 0)$ è :
$$(x, y - 3/2, z - 27/8) \cdot (0, 27/4, -1) = 0$$
cioé $2\frac{27}{4}y - z - \frac{27}{4} = 0$.
3. Il versore normale calcolato $N(t, \theta) = (-t^3 \sin\theta, 3t^5, -t^3 \cos\theta)$ rispetta l'orientazione prescritta, quindi
$$\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2t^3 \sin\theta, t^3 \cos\theta, t) \cdot (-t^3 \sin\theta, 3t^5, -t^3 \cos\theta) dt d\theta = -2\pi \frac{2^7 - 1}{7}$$

4. Considerando l'insieme Ω ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la superficie , giacente sul piano yz, sottesa al grafico della funzione $z = y^3$, con $y \in [1, 2]$:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \rho \sin\theta, y = t, z = \rho\cos\theta, \ ,\theta \in [0, 2\pi], t \in [1, 2], \rho \in [0, t^3]\}$$

e applicando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int\int\int_\Omega 2dxdydz = \int\int_\Sigma F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_{C_1} F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_{C_2} F \cdot \hat{n}_e dS.$$

dove C_1 e C_2 sono rispettivamente i cerchi giacenti sul piano $y = 1$ e $y = 2$ di raggio 1 e 8.
Abbiamo

$$\int\int\int_\Omega 2dxdydz = 2Vol(\Omega) = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{t^3} \rho d\rho dt d\theta = 2\pi\frac{2^7 - 1}{7}$$

$$\int\int_{C_1} F\cdot\hat{n}_e dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1)\cdot(0, -1, 0)d\rho d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sin\theta d\rho d\theta = 0$$

$$\int\int_{C_2} F\cdot\hat{n}_e dS = \int_0^{2\pi}\int_0^8 (2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1)\cdot(0, 1, 0)d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^8 \rho\sin\theta d\rho d\theta = 0$$

Dato che l'orientazione di Σ prescritta, soddisfacente la diseguaglianza $\hat{n}\cdot\hat{e}_y \geq 0$, è quella per cui il versore normale è entrante in Ω, abbiamo

$$\begin{aligned}\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS &= -\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n}_e dS \\ &= -\int\int\int_\Omega 2dxdydz + \int\int_{C_1} F \cdot \hat{n}_e dS + \int\int_{C_2} F \cdot \hat{n}_e dS \\ &= -2\pi\frac{2^7 - 1}{7}\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si consideri il campo vettoriale $F(x, y, z) = (zy\cos(xy), zx\cos(xy) + z^2, \sin(xy) + 2zy)$

1. Mostrare che F è irrotazionale
2. Calcolare un potenziale.

3. Calcolare il lavoro di F lungo la curva γ di parametrizzazione $\alpha(t) = (t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Soluzione:

1.
$$rotF = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$$

2. Imponendo le tre condizioni
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = zy\cos(xy), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) = zx\cos(xy) + z^2, \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = sin(xy) + 2zy$$
otteniamo $U(x, y, z) = z\sin(xy) + yz^2 + c$, con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

3. $\int_\gamma F dr = U(\alpha(\pi/2)) - U(\alpha(0)) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^4}{16}$

Esercizio 3

Calcolare la serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2$, definita per $x \in [-1, 1]$ da $f(x) = |\sin(x)|$.

Soluzione:

La funzione è pari, quindi $b_n = 0$ per ogni n. Inoltre:

$$a_0 = 2\int_0^1 \sin(x)dx = 2(1 - \cos(1)),$$

$$a_n = 2\int_0^1 \sin(x)\cos(n\pi x)dx = 2\frac{1 - (-1)^n\cos(1)}{1 - \pi^2 n^2}$$

$$f(x) = 1 - \cos(1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n\cos(1)}{1 - \pi^2 n^2}\cos(n\pi x)$$