Esercizi di riepilogo sulle curve

1. Si fornisca una parametrizzazione per le seguenti curve:

   (a) l'ellisse $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$
   Soluzione: $\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0\}$
   Soluzione: $\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

   (c) $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq x\}$
   Soluzione: $\alpha(t) = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [\arctan(3/2), \arctan(3/2) + \pi]$.

   (d) la retta in $\mathbb{R}^3$ intersezione dei piani $z = 2x + y$ e $z = -x + 3y$
   Soluzione: $\alpha(t) = (t, 3t/2, 7t/2)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (e) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + y + z = 0$ con la superficie $x^2 + y = 0$
   Soluzione: $\alpha(t) = (t, -t^2, +t^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (f) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $z = 1$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   Soluzione: $\alpha(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (g) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x + z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   Soluzione: $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (h) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $x+y+z = 0$ con la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   Soluzione: La curva cercata giace sul piano di equazione $x+y+z = 0$, che è un piano passante per l'origine O e ortogonale al vettore $N = (1, 1, 1)$. Dato che la superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ è una superficie sferica di raggio 1 centrata in O, possiamo già capire che la curva cercata sarà una circonferenza di raggio 1 (quella ottenuta tagliando la superficie sferica con un piano passante per il suo centro). Cerchiamo ora una sua parametrizzazione.
   Cominciamo utilizzando l'informazione che la curva giace sul piano $x + y + z = 0$. Se indichiamo con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ s due vettori di norma 1 paralleli al piano $x + y + z = 0$ (quindi ortogonali ad $N = (1, 1, 1)$) e ortogonali tra loro, ad es $\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, allora le coordinate (x, y, z) di un generico punto P appartenente al piano potranno essere ottenute come:
   $$(x, y, z) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrari. Le coordinate $(x(t), y(t), z(t))$ di un generico punto $P(t)$ della curva potranno essere espresse come:

$$(x(t), y(t), z(t)) = a(t)\vec{v}_1 + b(t)\vec{v}_2,$$

dove i coefficienti a, b sono ora funzioni di un parametro t. Abbiamo dunque

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a(t) + \frac{\sqrt{6}}{6}b(t), -\frac{\sqrt{2}}{2}a(t) + \frac{\sqrt{6}}{6}b(t), -\frac{\sqrt{6}}{3}b(t)\right).$$

Imponiamo ora che la curva appartenga alla superficie sferica, ovvero che per ogni valore del parametro t le coordinate $x(t), y(t), z(t)$ soddisfino l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Otteniamo $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$, equazione che lega i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$, che è automaticamente verificata ponendo $a(t) = \cos t$ e b(t)=$\sin t$, con $t \in [0, 2\pi]$. Concludendo, la parametrizzazione cercata è :

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \cos t\,\vec{v}_1 + \sin t\,\vec{v}_2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin t, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin t, -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

(i) la curva in $\mathbb{R}^3$ intersezione del piano $y + z = 1$ con la superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$ dal punto $(0, 1/2, 1/2)$ al punto $(1, 0, 1)$.
Soluzione: $\alpha(t) = (t, (1 - t^2)/2, (1 + t^2)/2)$, $t \in [0, 1]$.

2. Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t, t\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.
Soluzione:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} e^{2t}\sqrt{2e^{2t} + 1}dt = \frac{1}{6}\left((1 + 2e^{\sqrt{2}})^{3/2} - 3^{3/2}\right)$$

3. Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma f ds$, dove γ è la curva parametrizzata da

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}, t, \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\right) \qquad t \in [0, \sqrt{2}/2]$$

e $f(x,y,z) = (2y^2+1)^{-3/2}$
Soluzione:

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\sqrt{2}/2} (2t^2+1)^{-3/2}(2t^2+1)^{1/2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(t\sqrt{2})\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$$

4. Si calcolino le coordinate del baricentro della curva (cardioide) descritta da:

$$\alpha(\theta) = ((1+\cos\theta)\cos\theta, (1+\cos\theta)\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

nell'ipotesi che la densità lineare di massa sia costante.
Soluzione: Se indichiamo con ρ la densità lineare di massa abbiamo

$$M = \rho\int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}d\theta = \rho\int_0^{2\pi} 2\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}d\theta = 2\rho\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8\rho$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{8\rho}\int_0^{2\pi} \rho(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta + \frac{1}{8}\int_\pi^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{8\rho}\int_0^{2\pi} \rho(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\cos\theta)\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\left|\cos\beta\right| d\beta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\cos\beta d\beta - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2 2\beta+\cos 2\beta)\cos\beta d\beta \\ &= \frac{1}{2}\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}, \qquad (1) \end{aligned}$$

5. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t+\cos t, t-\cos t, \sqrt{2}\sin t)$$

Soluzione:
$$T(t) = \frac{1}{2}(1-\sin t, 1+\sin t, \sqrt{2}\cos t),$$
$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, \cos t, -\sqrt{2}\sin t),$$
$$k(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

6. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura della curva γ parametrizzata da
$$\alpha(t) = ((2+\cos t)\sin t, (2+\cos t)\cos t, \sin t)$$
nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$. Si determinino inoltre centro e raggio del cerchio osculatore in quel punto.
Soluzione: Conviene utilizzare le formule
$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$
$$N(t) = B(t) \wedge T(t), \qquad B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|},$$
$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$
Otteniamo quindi $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2,0)$, $\mathbf{N}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{205}}(-12,6,-5)$, $\mathbf{B}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{41}}(2,-1,-6)$, $k(\pi/2) = \frac{\sqrt{41}}{5\sqrt{5}}$. Il raggio del cerchio osculatore è $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{41}}$, mentre le coordinate del centro sono
$$(x_C, y_C, z_C) = (2,0,1) + \frac{5}{41}(-12,6,-5)$$

7. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto dell'arco di spirale di Archimede, parametrizzato da:
$$\alpha(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
Soluzione:
$$T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta),$$
$$N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}(-\sin\theta - \theta\cos\theta, \cos\theta - \theta\sin\theta)$$
$$k(\theta) = \frac{2+\theta^2}{(1+\theta^2)^{3/2}}$$

8. Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura in ogni punto della curva grafico della funzione $y = \cosh x$.
   Soluzione: Parametrizzando la curva con $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, abbiamo:

$$T(t) = \left(\frac{1}{\cosh t}, \frac{\sinh t}{\cosh t}\right)$$

$$N(t) = \left(-\frac{\sinh t}{\cosh t}, \frac{1}{\cosh t}\right)$$

$$k(t) = \frac{1}{(\cosh t)^2}$$