

Complementi di Analisi Matematica

16 luglio 2013

Esercizio 1 (7 punti)

Verificare che il seguente campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos(xy) - (x^2y + y^3) \sin(xy), 2y \cos(xy) - (x^3 + xy^2) \sin(xy))$$

è irrotazionale e calcolarne un potenziale.

Calcolare infine il lavoro di \mathbf{F} lungo la curva γ parametrizzata da $\alpha(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$

Soluzione:

Dobbiamo verificare che $\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0$. Infatti abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = -(3x^2 + 3y^2) \sin(xy) - (x^3y + y^3x) \cos(xy)$$

Il potenziale associato a tale campo conservativo è

$$U(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy) + \cos t.$$

Il lavoro di \mathbf{F} lungo la curva γ è dato da:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\alpha(\pi/2)) - U(\alpha(0)) = U(0, 3) - U(2, 0) = 9 - 4 = 5.$$

Esercizio 2 (8 punti)

Determinare le coordinate (x_G, y_G) del baricentro della regione

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, | 0 \leq y \leq 2 + \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Soluzione:

$$M = \int \int_D 1 dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2+\sin x} dy dx = \int_0^{\pi/2} (2 + \sin x) dx = \pi + 1$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int_D x dx dy = \frac{1}{\pi + 1} \int_0^{\pi/2} x(2 + \sin x) dx = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 1}{\pi + 1}$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int \int_D y dx dy = \frac{1}{\pi + 1} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 + \sin x)^2}{2} dx = \frac{1}{2(\pi + 1)} \left(\frac{9\pi}{4} + 4 \right).$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si calcolino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy$ sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

Soluzione: Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari interni a D , ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2x - 2\sqrt{3}y = 0 \\ -2\sqrt{3}x + 2y = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è il punto $(0,0)$, che appartiene al bordo dell'insieme D e in cui la funzione vale $f(0,0) = 0$.

Analizziamo ora il bordo dell'insieme D composto da tre parti:

1. l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$,
2. il segmento $y = 0, x \in [0, 1]$,
3. il segmento $x = 0, y \in [0, 1]$.

Analizziamo separatamente ogni parte.

1. l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$. Parametizziamo tale arco con $\alpha(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi/2]$. La funzione f ristretta a tale curva è data da:

$$f(\alpha(t)) = \sin^2(t) - \cos^2(t) - 2\sqrt{3}\cos t \sin t = -\cos(2t) - \sqrt{3}\sin(2t)$$

Cerchiamo i valori di $t \in [0, \pi/2]$ tali che $\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = 0$, ovvero

$$2\sin(2t) - 2\sqrt{3}\cos(2t) = 0$$

otteniamo $\tan(2t) = \sqrt{3}$, ovvero $2t = \pi/3 + k\pi$, quindi $t = \pi/6 + k\pi/2$. L'unica soluzione contenuta nell'intervallo $[0, \pi/2]$ è $t = \pi/6$ in cui f vale $f(\alpha(\pi/6)) = -1/2 - 3/2 = -2$. Nei punti del bordo dell'arco di circonferenza abbiamo $f(1,0) = -1$ e $f(0,1) = 1$.

2. il segmento $y = 0, x \in [0, 1]$. Parametizziamo tale segmento con $\alpha(t) = (t, 0), t \in [0, 1]$. La funzione f ristretta a tale curva è data da $f(\alpha(t)) = -t^2$, che è una funzione decrescente sull'intervallo $[0,1]$, quindi il valore massimo si ottiene per $t = 0$ in cui f vale $f(0,0) = 0$, mentre il valore minimo si ottiene per $t = 1$ in cui f vale $f(1,0) = -1$.

3. il segmento $y = 0, y \in [0, 1]$. Parametizziamo tale segmento con $\alpha(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$. La funzione f ristretta a tale curva è data da $f(\alpha(t)) = t^2$, che è una funzione crescente sull'intervallo $[0, 1]$, quindi il valore massimo si ottiene per $t = 1$ in cui f vale $f(0, 1) = 1$, mentre il valore minimo si ottiene per $t = 0$ in cui f vale $f(0, 0) = 0$.

Concludendo il minimo assoluto di f in D è -2 , raggiunto nel punto $(\sqrt{3}/2, 1/2)$, mentre il massimo assoluto di f in D è 1 , raggiunto nel punto $(0, 1)$.

Esercizio 4 (7 punti)

Calcolare la probabilità che l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, dove a, b, c sono i risultati del lancio di tre dadi non truccati, abbia due soluzioni reali coincidenti.

Soluzione: Dobbiamo calcolare la probabilità che $b^2 = 4ac$, dove a, b, c sono i risultati del lancio di tre dadi non truccati. Calcoliamo tale probabilità come rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili.

Il numero di tutti i possibili risultati del lancio di tre dadi è $6 * 6 * 6 = 6^3$.

I casi favorevoli sono solamente 5: $(b=2, a=1, c=1)$, $(b=4, a=4, c=1)$, $(b=4, a=1, c=4)$, $(b=4, a=2, c=2)$, $(b=6, a=3, c=3)$.

La probabilità cercata è dunque $P = \frac{5}{6^3}$