Complementi di Analisi Matematica

1 settembre 2014

Esercizio 1 (7 punti)

Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $F(x,y) = (y, -x)$ lungo la curva γ espressa in coordinate polari (ρ, θ) da $\{\rho = \theta^2 + 1, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Soluzione: Dato che la curva γ è parametrizzata da:

$$\alpha(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) = \big((\theta^2+1)\cos\theta, (\theta^2+1)\sin\theta\big), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

dove il vettore tangente alla curva nel punto $\gamma(\theta)$ è dato da:

$$\alpha'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta),$$

il lavoro del campo vettoriale F lungo γ è dato da:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) d\theta \\
= &\int_0^{2\pi} (\rho(\theta)\sin\theta, -\rho(\theta)\cos\theta) \cdot (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta, \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta) \\
= &-\int_0^{2\pi} \rho(\theta)^2 d\theta = -\int_0^{2\pi} (\theta^2+1)^2 d\theta = -\int_0^{2\pi} (\theta^4 + 1 + 2\theta^2) d\theta = -\left(\frac{(2\pi)^5}{5} + 2\pi + 2\frac{(2\pi)^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti)

Si determinino il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x - \sqrt{3}y + 5$ in $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2, x \ge 0\}$.

Soluzione: Dato che $\nabla f(x,y) = (1, -\sqrt{3})$, non ci sono punti stazionari interni all'insieme D e i punti di massimo e minimo assoluto vanno ricercati sul bordo di D, Quest'ultimo è costituito da 4 archi di curva regolare:

- La semicirconferenza $C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \ge 0\}$, parametrizzabile tramite la mappa $\alpha \colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$:

  $$\alpha(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

  La funzione f sui punti di tale curva assume i valori $f(\alpha(\theta)) = \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 5$. Abbiamo che $\frac{d}{d\theta} f(\alpha(\theta)) = -\sin\theta - \sqrt{3}\sin\theta$, e tale funzione si annulla per $\theta = -\pi/3$, dove $f(\alpha(-\pi/3)) = 7$. Negli estremi abbiamo $f(\alpha(-\pi/2)) = 5 + \sqrt{3}$ e $f(\alpha(\pi/2)) = 5 - \sqrt{3}$.

- La semicirconferenza $C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 2, x \geq 0\}$, parametrizzabile tramite la mappa $\alpha\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$:

$$\alpha(\theta) := (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta), \qquad \theta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

  La funzione f sui punti di tale curva assume i valori $f(\alpha(\theta)) = \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{6}\sin\theta + 5$. Abbiamo che $\frac{d}{d\theta} f(\alpha(\theta)) = -\sqrt{2}\sin\theta - \sqrt{6}\sin\theta$, e tale funzione si annulla per $\theta = -\pi/3$, dove $f(\alpha(-\pi/3)) = 5 + 2\sqrt{2}s$. Negli estremi abbiamo $f(\alpha(-\pi/2)) = 5 + \sqrt{6}$ e $f(\alpha(\pi/2)) = 5 - \sqrt{6}$.

- Il segmento $x = 0$, $y \in [1, \sqrt{2}]$, dove la funzione vale $f(0,y) = -\sqrt{3}y + 5$ e assume mimimo in $y = \sqrt{2}$ dove vale $f(0,\sqrt{2}) = 5 - \sqrt{6}$ e massimo in $y = 1$, dove vale $f(0,1) = 5 - \sqrt{3}$.

- Il segmento $x = 0$, $y \in [-\sqrt{2}, -1]$, dove la funzione vale $f(0,y) = -\sqrt{3}y + 5$ e assume massimo in $y = -\sqrt{2}$ dove vale $f(0,-\sqrt{2}) = 5 + \sqrt{6}$ e minimo in $y = -1$, dove vale $f(0,-1) = 5 + \sqrt{3}$.

Concludendo, il punto di massimo assoluto di f su D è il punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{6}/2)$ dove la funzione vale $5 + 2\sqrt{2}$, mentre il punto di minimo assoluto di f su D è il punto $(0, \sqrt{2})$ dove la funzione vale $5 - \sqrt{6}$.

Esercizio 3 (8 punti)

Sia G il grafico della funzione $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Si calcoli l'area della superficie S data dalla parte di G che è esterna al cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > 3\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Soluzione: La superfice è parametrizzabile tramite la mappa $r\colon D \to \mathbb{R}^3$:

$$r(x,y) = (x, y, x^2+y^2-4), \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 16\}$$

Il vettore normale ad S è $N(x,y) = (-2x, -2y, 1)$ e l'area di S è data da:

$$A = \int\int_D \|N(x,y)\| dxdy = \int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy$$

Utilizzando le coordinate polari, l'integrale al secondo membro diviene:

$$\int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{6}(\sqrt{65} - 1)$$

Esercizio 4 (7 punti)

Quante volte deve essere lanciato un dado affinché la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore di 0.9?

Soluzione: La probabilità di ottenere 6 almeno una volta effettuando n lanci è data da

$$P_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Cerchiamo il più piccolo numero naturale n tale che $P_n > 0.9$, ovvero $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.9$. Impostando la disequazione $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x > 0.9$ si ottiene $x > \log(1/10)/\log(5/6) \sim 12.6$ Il numero minimo di lanci è quindi $n = 13$.