Complementi di Analisi Matematica

10 gennaio 2014

Esercizio 1 (8 punti)

Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(yz) + z\exp(xz), zx\cos(yz), xy\cos(yz) + x\exp(xz) - 1)$$

è irrotazionale e calcolarne un potenziale.
Calcolare inoltre il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t, t^3, \pi t), \qquad t \in [0, 1].$$

Soluzione:

Dobbiamo verificare che le tre componenti del rotore di $\mathbf{F}$ sono tutte nulle ovvero che:

$$\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x = 0$$

e infatti:

$$x\cos(yz) - xyz\sin(yz) - x\cos(yz) + xyz\sin(yz) = 0,$$

$$y\cos(yz) + \exp(xz) + zx\exp(xz) - (y\cos(yz) + \exp(xz) + zx\exp(xz)) = 0,$$

$$z\cos(yz) - z\cos(yz) = 0$$

Dato che il campo $\mathbf{F}$ ha rotore nullo ed è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ (che è un dominio semplicemente connesso) allora è conservativo e possiamo calcolarne un potenziale $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Imponendo che $\frac{\partial}{\partial x}U(x, y, z) = \sin(yz) + z\exp(xz)$ otteniamo che

$$U(x, y, z) = x\sin(yz) + \exp(xz) + g(y, z),$$

dove g è una funzione che dipende solo dalle variabili y e z.
Imponendo che $\frac{\partial}{\partial y}U(x, y, z) = zx\cos(yz)$, abbiamo

$$zx\cos(yz) + \frac{\partial}{\partial y}g(y, z) = zx\cos(yz),$$

da cui $\frac{\partial}{\partial y}g(y, z) = 0$ e quindi $g(y, z) = f(z)$, dove f è una funzione che dipende solo dalla variabile z. Quindi il potenziale U deve essere della forma

$$U(x, y, z) = x\sin(yz) + \exp(xz) + f(z).$$

Imponendo infine che $\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) = xy\cos(yz) + x\exp(xz) - 1$, abbiamo

$$xy\cos(yz) + x\exp(xz) + \frac{d}{dz}f(z) = xy\cos(yz) + x\exp(xz) - 1,$$

quindi $\frac{d}{dz}f(z) = -1$, da cui $f(z) = -z + cost$. Concludendo il potenziale cercato è :

$$U(x,y,z) = x\sin(yz) + \exp(xz) - z + cost.$$

Per calcolare il lavoro del campo lungo la cuva γ, dato che il campo è conservativo, è sufficiente calcolare la differenza fra il potenziale nel punto iniziale ed il potenziale nel punto finale:

$$L(\mathbf{F},\gamma) = U(\alpha(1)) - U(\alpha(0)) = U(1,1,\pi) - U(0,0,0) = e^{\pi} - \pi - 1.$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si calcoli l'integrale triplo $\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$, dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x,y,z) = z(x+y)$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Soluzione:

Utilizzando le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \\
= & \int\int\int_{[0,1]\times[0,\pi/4]\times[0,\pi/2]} \rho^2\cos\phi\sin\phi(\cos(\theta)+\sin(\theta))\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
= & \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/4} \sin^2\phi\cos(\phi)d\phi \int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)+\sin(\theta))d\theta \\
= & \frac{1}{5}\frac{(\sqrt{2}/2)^3}{3}2 = \frac{\sqrt{2}}{30}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Si calcoli l'integrale di superficie $\int\int_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, dS$, dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (1,x,y)$ e Σ è la superficie del triangolo in $\mathbb{R}^3$ di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ punti verso l'alto (cioé $\hat{n}\cdot k \geq 0$).
Soluzione:

Il triangolo giace sul piano di equazione $z = -x - y + 1$ (che otteniamo, ad esempio, scrivendo l'equazione di un generico piano $ax + by + cz = d$ e imponendo che i tre punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ appartengano a tale piano). Abbiamo quindi che la superficie Σ può essere descritta come un sottoinsieme del grafico della funzione $f(x, y) = -x - y + 1$, dove x, y appartengono all'insieme del piano $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS &= \int\int_{T} \mathbf{F}(x, y, -x - y + 1) \cdot N(x, y) dxdy = \int\int_{T} (1, x, y)(1, 1, 1) dxdy \\ &= \int\int_{T} (1 + x + y) dxdy = Area(T) + \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y) dydx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 (x(1 - x) + (1 - x)^2/2) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 1/3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Esercizio 4 (7 punti)

Un'urna contiene 10 palline, numerate dall'1 al 10. Vengono effettuate 2 estrazioni. Qual è la probabilità che i 2 numeri estratti siano in ordine strettamente crescente, nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta venga reinserita nell'urna? Qual è la probabilità che i 2 numeri estratti siano in ordine strettamente crescente, nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta non venga reinserita nell'urna?

Soluzione: Calcolando la probabilità P come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, abbiamo che nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta venga reinserita nell'urna la probabilità cercata è

$$P = \frac{9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{100} = \frac{\sum_{n=1}^{9} n}{100} = \frac{\frac{9(10)}{2}}{100} = \frac{9}{20}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo applicato la formula $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$.

Se invece consideriamo il caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta non viene reinserita nell'urna, abbiamo

$$P = \frac{9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}{90} = \frac{\frac{9(10)}{2}}{90} = \frac{1}{2}.$$

Potevamo ragionare in modo differente. Indichiamo con E_1 l'evento i 2 numeri estratti sono in ordine strettamente crescente, con E_2 l'evento i 2 numeri estratti sono in ordine strettamente decrescente, e con E_3 l'evento i 2 numeri estratti sono uguali. I tre eventi sono mutuamente disgiunti e la loro unione è l'insieme Ω di tutti i possibili risultati delle due estrazioni, quindi:

$$1 = P(\Omega) = P(E_1) + +P(E_2) + P(E_3)$$

Nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta venga reinserita nell'urna abbiamo che $P(E_3) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ e $P(E_1) = P(E_2)$. Abbiamo dunque

$$2P(E_1) + \frac{1}{10} = 1$$

e dunque $P(E_1) = \frac{9}{20}$.
Nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta non venga reinserita nell'urna abbiamo che $P(E_3) = 0$ e $P(E_1) = P(E_2)$. Abbiamo dunque

$$2P(E_1) = 1$$

e dunque $P(E_1) = \frac{1}{2}$.