Complementi di Analisi Matematica

10 febbraio 2012

Esercizio 1 (7 punti)

Verificare che il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(4x^3 + 4xy - 3y^3, 2x^2 - 9xy^2 - 3y^2\right)$$

è conservativo e calcolarne un potenziale. Calcolare quindi il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ, grafico di

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3, \qquad x \in [0,1]$$

Soluzione:

Dobbiamo verificare che le il rotore di $\mathbf{F}$ è nullo, ovvero che:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x$$

e infatti:

$$4x - 9y^2 = 4x - 9y^2$$

Dato che il campo $\mathbf{F}$ ha rotore nullo ed è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ (che è un dominio semplicemente connesso) allora è conservativo e possiamo calcolarne un potenziale $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Imponendo che $\frac{\partial}{\partial x} U(x,y) = 4x^3 + 4xy - 3y^3$ otteniamo che

$$U(x,y) = x^4 + 2x^2 y - 3xy^3 + g(y),$$

dove g è una funzione che dipende solo dalla variabile y.
Imponendo che $\frac{\partial}{\partial y} U(x,y) = 2x^2 - 9xy^2 - 3y^2$, abbiamo

$$2x^2 - 9xy^2 + g'(y) = 2x^2 - 9xy^2 - 3y^2,$$

da cui $g'(y) = -3y^2$ e quindi $g(y) = -y^3 + cost.$ Concludendo il potenziale cercato è :

$$U(x,y) = x^4 + 2x^2 y - 3xy^3 - y^3 + cost.$$

Dato che il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una qualunque curva γ dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale di γ:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(P_2) - U(P_1),$$

dove P_1 è il punto iniziale di γ e P_2 è il punto finale di γ, nel nostro caso:

$$P_1 = (0, f(0)) = (0, 3), \qquad P_2 = (1, f(1)) = (1, 2)$$

Quindi

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(1, 2) - U(0, 3) = 0$$

Esercizio 2 (8 punti)
Sia Σ la superficie laterale di un tronco di cono, descritta da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x + z, y + z, x^2 + y^2\big)$$

Calcolare Il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ, ovvero l'integrale di superficie $\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS$, scegliendo il versore normale $\hat{n}$ che punta verso l'alto $(\hat{n} \cdot \hat{k} \geq 0)$

Soluzione: La superficie Σ, in quanto grafico di funzione, può essere parametrizzata in funzione dei parametri x e y. In altre parole il vettore posizione $\mathbf{r}$ dei punti della superficie è dato da:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - \sqrt{x^2 + y^2})$$

dove $(x, y) \in D$, con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. I due vettori tangenti alla superficie sono:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{r}(x, y) = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{r}(x, y) = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Il vettore normale, ottenuto come prodotto vettoriale dei due vettori tangenti è :

$$\mathbf{N} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$$

che fornisce l'orientazione della superficie richiesta dall'esercizio $\mathbf{N} \cdot \hat{k} > 0$. L' integrale di superficie $\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS$ è quindi dato da:

$$\int\int_D \Big(x + 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, y + 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2\Big) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - x + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - y + x^2 + y^2 \right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \left(\rho + \cos\theta - \rho\cos\theta + \sin\theta - \rho\sin\theta + \rho^2\right) \rho d\rho d\theta \\
&= 2\pi \int_{1/2}^1 \left(\rho^2 + \rho^3\right) d\rho = \pi \frac{101}{96}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = 2x - y + z$ ristretta alla superficie

$$
\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 4\}
$$

Soluzione: Occupiamoci prima di tutto di ricercare i punti candidati ad essere punti di max-minimo assoluti tra i punti di $(x, y, z) \in \Sigma$ tali che $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 < 4$ (escludiamo il bordo di Σ). Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 2x - y + z - \lambda(z - x^2 - y^2)$. Otteniamo il sistema

$$
\begin{cases}
2 + 2\lambda x = 0 \\
-1 + 2\lambda y = 0 \\
1 - \lambda = 0 \\
z - x^2 - y^2 = 0
\end{cases}
$$

che ha come soluzione

$$
\lambda = 1, \quad x = -1, \quad y = 1/2, \quad z = 5/4
$$

Abbiamo effettivamente trovato un punto all'interno dell'insieme considerato, in quanto è verificata la diseguagliaanza stretta $x^2 + y^2 < 4$ con $x = -1$ e $y = 1/2$. La funzione f in $(-1, 1/2, 5/4)$ vale

$$
f(-1, 1/2, 5/4) = -2 - 1/2 + 5/4 = -1.25
$$

Analizziamo ora i punti sul bordo di Σ, ovvero i punti appartenenti alla curva $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 4$. Tale insieme è una circonferenza di raggio 2 che giace sul piano orizzontale $z = 4$. Possiamo parametrizzarla come:

$$
\alpha(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 4), \qquad \theta \in [0, 2\pi]
$$

La funzione, ristretta alla curva α, può essere vista come funzione del parametro θ:

$$
f(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = 4\cos\theta - 2\sin\theta + 4, \qquad \theta \in [0, 2\pi]
$$

Abbiamo $f(x(0), y(0), z(0)) = f(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = 8$, mentre $f'(\theta) = 0$ se $-4\sin\theta - 2\cos\theta = 0$, quindi se $\cos\theta = -2\sin\theta$, cioè se $\cos\theta = -2\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ oppure se $\cos\theta = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Nel primo caso abbiamo

$$f(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = -8\frac{\sqrt{5}}{5} - 2\frac{\sqrt{5}}{5} + 4 = -2\frac{\sqrt{5}}{5} + 4 = -0.48$$

Nel secondo caso abbiamo

$$f(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = 8\frac{\sqrt{5}}{5}2\frac{\sqrt{5}}{5} + 4 = 2\frac{\sqrt{5}}{5} + 4 = 8.48$$

Concludendo, il massimo assoluto è assunto in $\left(4\frac{\sqrt{5}}{5}, -2\frac{\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ e vale 8.48, mentre il minimo assoluto è assunto in $(-1, 1/2, 5/4)$ e vale -1.25.

L'esercizio poteva anche essere risolto riducendosi ad un problema bidimensionale, ovvero andando a studiare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $F(x, y) = 2x - y + x^2 + y^2$ sull'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
I punti interni di D candidati ad essere punti di massimo e minimo assoluti sono i punti tali che $\nabla F(x, y) = (0, 0)$, ovvero le soluzioni di:

$$\begin{cases} 2 + 2x = 0 \\ -1 + 2y = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi il punto $(-1, 1/2)$ e $F(-1, 1/2) = -5/4$. I punti del bordo dell'insieme D sono i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$. Possiamo cercare i punti di tale curva candidati ad essere i punti di massimo e minimo assoluto di F parametrizzando la curva (come abbiamo fatto prima) oppure utilizzando il mettodo dei moltiplicatori di Lagrange. In tal caso la funzione Lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x - y + x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2 + 2x - 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$x = 4\frac{\sqrt{5}}{5}, y = -2\frac{\sqrt{5}}{5}2, \qquad x = -4\frac{\sqrt{5}}{5}, y = 2\frac{\sqrt{5}}{5}2$$

$$F(4\frac{\sqrt{5}}{5}, -2\frac{\sqrt{5}}{5}) = 4 + 2\sqrt{5} \qquad F(-4\frac{\sqrt{5}}{5}, 2\frac{\sqrt{5}}{5}) = 4 - 2\sqrt{5}$$

e arriviamo alle stesse conclusioni che avevamo ottenuto con il primo metodo diri-soluzione.

Esercizio 4 (7 punti)

Un cassetto contiene 10 calzini bianchi e 6 neri. Si estraggono a caso 2 calzini.

1. Calcolare la probabilità che i calzini estratti siano spaiati.

2. Sapendo che i calzini estratti sono entrambi dello stesso colore, qual è la probabilità che siano bianchi?

Soluzione: Indichiamo con BN l'evento il primo calzino estratto è bianco e il secondo calzino estratto è nero, con NB l'evento il primo calzino estratto è nero e il secondo calzino estratto è bianco, con NN l'evento il primo calzino estratto è nero e il secondo calzino estratto è nero e con BB l'evento il primo calzino estratto è bianco e il secondo calzino estratto è bianco.

L'evento E1= i calzini estratti sono spaiati puøessere ottenuto come unione dei due eventi incompatibili NB e BN, quindi

$$P(E1) = P(NB) + P(BN)$$

Ora $P(NB) = \frac{6}{16}\frac{10}{15}$, mentre $P(BN) = \frac{10}{16}\frac{6}{15}$, quindi $P(E1) = 1/2$.

L'evento E2= i calzini estratti sono dello stesso colore può essere ottenuto come unione dei due eventi incompatibili NN e BB, quindi

$$P(E2) = P(NN) + P(BB)$$

Ora $P(NN) = \frac{6}{16}\frac{5}{15} = \frac{1}{8}$, mentre $P(BB) = \frac{10}{16}\frac{9}{15} = \frac{3}{8}$, quindi

$$P(BB|E2) = \frac{P(E2 \cap BB)}{P(E2)} = \frac{P(BB)}{P(E2)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$