# Complementi di Analisi Matematica

12 febbraio 2013

**Esercizio 1** (8 punti)

Si determinino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$ nell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, | \; x \geq 0, \; -1 + x \leq y \leq 1 - x\}.$$

**Soluzione**: Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari interni all'insieme $\Omega$, ovvero i punti $(x, y)$ tali che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Risolviamo quindi il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 0 \\ 2x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono il punto $(0, 0)$, che non è interno a $\Omega$, ed il punto $(3/4, -9/16)$, che non è interno a $\Omega$.

Analizziamo ora il bordo, composto da tre parti

- Segmento $x = 0$, $y \in [-1, 1]$. La funzione ristretta ai punti di tale segmento assume la forma
$$f(0, y) = y^2$$
In $y = 0$ c'è un minimo e $f(0, 0) = 0$, mentre in $y = 1$ e $y = -1$ abbiamo un massimo e $f(0, 1) = f(0, -1) = 1$.

- Segmento $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$. La funzione ristretta ai punti di tale segmento assume la forma
$$f(x, 1 - x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$
Negli estremi abbiamo $f(0, 1) = f(1, 0) = 1$, inoltre $\frac{d}{dx}(-x^3 + 3x^2 - 2x + 1) = 0$ per $x = 1 - \sqrt{3}/3 \sim 0,4$ e $f(1 - \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) = -(1 - \sqrt{3}/3)^3 + 3(1 - \sqrt{3}/3)^2 - 2(1 - \sqrt{3}/3) + 1 \sim 0.6$

- Segmento $y = -1 + x$, $x \in [0, 1]$. La funzione ristretta ai punti di tale segmento assume la forma
$$f(x, -1 + x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 1$$
Negli estremi abbiamo $f(0, -1) = f(1, 0) = 1$, inoltre $\frac{d}{dx}(3x^3 - x^2 - 2x + 1) = 0$ per $x = (1 + \sqrt{19})/9 \sim 0.6$ e $f(1 + \sqrt{19})/9, 1 + \sqrt{19})/9 - 1) \sim 0.09$

Concludendo, il punto di minimo assoluto è $(0,0)$ dove $f(0,0)=0$, mentre i punti di massimo assoluto sono $0,1)$ e $(0,-1)$ dove $f=1$.
**Esercizio 2** (7 punti) Si calcoli l'integrale di linea del campo vettoriale $F(x,y) = (3y, 2x)$ lungo la circonferenza $\gamma$ di centro $(0,1)$ e raggio 2, percorsa in senso orario.

**Soluzione**: Parametrizziamo $\gamma$ con

$$\alpha(\theta) = (2\cos\theta, 1-2\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

che descrive la curva percorsa in senso orario.
Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} dr &= \int_0^{2\pi} (3-6\sin\theta, 4\cos\theta)(-2\sin\theta, -2\cos\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-6\sin\theta + 12\sin^2\theta - 8\cos^2\theta) d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

**Esercizio 3** (8 punti) Si calcoli il flusso $\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\hat{n}dS$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x-y+z, x^2, z)$ sulla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 1/2\}$, orientata il modo tale che il versore normale $\hat{n}$ soddisfi la diseguaglianza $\hat{n}\cdot \ \hat{k} > 0$
**Soluzione**: Parametrizziamo $\Sigma$ tramite le coordinate polari sferiche:

$$r(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi), \qquad \theta \in [0, 2\pi], \pi \in [0, \pi/3]$$

$$N(\theta,\phi) = \sin\phi(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

$$\begin{aligned} \int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\hat{n}dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin\phi(2\sin\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta + \cos\phi, \sin^2\phi\cos^2\theta, \cos\phi)\cdot \\ &\quad (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} (2\sin^3\phi\cos^2\theta - \sin^3\phi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta + \\ &\quad + \sin^4\phi\cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\phi\sin\phi) d\phi d\theta \qquad (1) \\ &= \pi \end{aligned}$$

**Esercizio 4** (7 punti)
Un dado non truccato viene lanciato tre volte. Con quale probabilità almeno uno dei risultati è il numero 5?

**Soluzione**: Indichiamo con $A$ l'evento almeno uno dei tre risultati è il numero 5. Per calcolare $P(A)$ possiamo procedere in due modi diversi.

1. Rappresentiamo $A$ come l'unione di tre eventi $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, dove $A_1$ è l'evento "esce il numero 5 al primo lancio", $A_2$ è l'evento "esce il numero 5 al secondo lancio", $A_3$ è l'evento "esce il numero 5 al terzo lancio". Abbiamo che

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{6}$$

Abbiamo inoltre che

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P\left(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)\right) = P(A_1) + P((A_2 \cup A_3)) - P\left(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)\right)$$

Ma abbiamo che

$$P((A_2 \cup A_3)) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

$$P\left(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)\right) = P(A_1)P(A_2 \cup A_3) = \frac{1}{6}\frac{11}{36} = \frac{11}{6^3}$$

Quindi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{1}{6} + \frac{11}{36} - \frac{11}{6^3} = \frac{36 + 66 - 11}{6^3} = \frac{101}{6^3} = \frac{91}{216}$$

2. é più semplice il calcolo di $A^c$, l'evento "nessuno dei tre risultati è il numero 5", e utilizzare la formula:

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Dato che i tre lanci sono indipendenti abbiamo che

$$P(A^c) = \frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

Quindi

$$P(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = \frac{6^2 - 5^3}{6^3} = \frac{91}{216}$$