Complementi di Analisi Matematica

14 gennaio 2014

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare, punto per punto, la curvatura della curva γ di parametrizzazione:

$$\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Calcolare inoltre il lavoro lungo γ del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, -1, z)\,.$$

Soluzione:

Utilizziamo la formula $k(t) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$, dove

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2+t^2},$$

$$\alpha''(t) = (-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 0),$$

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t) = (-2\cos t + t\sin t, -2\sin t - t\cos t, 2+t^2), \quad \|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\| = \sqrt{t^4+5t^2+8}$$

otteniamo dunque:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{t^4+5t^2+8}}{(2+t^2)^{3/2}}$$

Per calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F}$ lungo γ, calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} L(\mathbf{F},\gamma) &= \int_0^\pi \mathbf{F}(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)dt = \int_0^\pi (1,-1,t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)dt \\ &= \int_0^\pi (\cos t - t\sin t - (\sin t + t\cos t) + t)\,dt = \left(t\cos t - t\sin t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^\pi \\ &= -\pi + \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 2 (9 punti)

Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2+y^2-2y$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2, y \ge x, y \ge -x\}$$

Soluzione: La funzione f è ifferenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Non ci sono quindi punti singolari ed i punti di massimo e minimo assoluto di f sull'insieme Ω vanno ricercati tra

- i punti interni in cui si annulla ∇f
- i punti del bordo di Ω

Il primo passo è la ricerca dei punti interni a Ω in cui $\nabla f = (0,0)$, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $x = 0, y = 1$. Il punto è all'interno dell'insieme Ω e $f(0,1) = -1$.
Analizziamo ora i punti del bordo, partendo, ad esempio, dal segmento $y = x$, $x \in [0,1]$. La funzione ristretta a tale lato ha la forma $f(x,x) = 2x^2 - 2x$, che ha un punto di minimo relativo in $x = 1/2$, dove vale $f(1/2,1/2) = -1/2$, mentre agli estremi abbiamo $f(0,0) = f(1,1) = 0$.
Analogamente, sul segmento $y = -x$, $x \in [-1,0]$, la funzione ha la forma $f(x,-x) = 2x^2+2x$, che ha un punto di minimo relativo in $x = -1/2$, dove vale $f(-1/2,1/2) = -1/2$, mentre agli estremi abbiamo $f(0,0) = f(-1,1) = 0$.
sull'arco di circonferenza di parametrizzazione $\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [\pi/4, 3\pi/4]$, la funzione ristretta a tale lato ha la forma $f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2 - 2\sqrt{2}\sin t$, che ha un punto di minimo relativo in $t = \pi/2$, dove vale $f(0,\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$, mentre agli estremi abbiamo $f(1,1) = f(-1,1) = 0$.

Concludendo, il massimo assoluto di f su Ω vale 0 e viene raggiunto nei punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $-1,1)$, mentre il minimo assoluto vale -1 e viene raggiunto nel punto interno $(0,1)$.
Esercizio 3 (9 punti)

Si calcoli l'integrale di superficie $\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\hat{n}\, dS$, dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,2z)$ e Σ è la superficie:

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$$

orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ punti verso il basso (cioé $\hat{n} \cdot k \leq 0$).
Soluzione: L'esercizio può essere risolto in (almeno) due modi diversi.

Soluzione 1: Parametrizziamo la superficie Σ nel modo seguente:

$$r(x,y) = (x.y, \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$$

abbiamo dunque che

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x,y) = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} r(x,y) = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x,y) \wedge \frac{\partial}{\partial y} r(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

Dato che il vettore $\frac{\partial}{\partial x} r(x,y) \wedge \frac{\partial}{\partial y} r(x,y)$ punta verso l'alto, allora per orientare la superficie Σ come richiesto scegliamo

$$N(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} r(x,y) \wedge \frac{\partial}{\partial y} r(x,y)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS &= \int\int_C \mathbf{F}(r(x,y)) \cdot N(x,y) dxdy \\
&= \int\int_C (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy \\
&= \int\int_C \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 d\rho d\theta = -\frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

Soluzione 2: Utilizziamo il teorema della divergenza. indichiamo con Ω il cono

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 1\}$$

Il bordo $\partial\Omega$ dell'insieme Ω è composto da due parti: la superficie laterale Σ e il cerchio $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 1, x^2+y^2 \leq 1\}$. Per il teorema della divergenza abbiamo dunque che

$$\int\int\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F} dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS + \int\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

Dato che

$$\int\int\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F} dxdydz = \int\int\int_\Omega 4 dxdydz = 4\,Vol(\Omega) = 4\frac{\pi}{3}$$

$$\int\int_C \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int_C \mathbf{F}(x,y,2) \cdot (0,0,1)\, dS = \int\int_C 2dS = 2Area(C) = 2\pi$$

Otteniamo quindi:

$$\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{F} dxdydz - \int\int_{C} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS = 4\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Esercizio 4 (7 punti)
Una fabbrica di biro ha tre stabilimenti: nel primo vengono prodotte il 50% delle biro, nel secondo il 30% e nel terzo il 20%. Sappiamo che il 3% delle biro prodotte nel primo stabilimento, il 5% delle biro prodotte nel secondo stabilimento e il 6% di quelle prodotte nel terzo stabilimento presentano dei difetti.
Qual è la probabilità che una biro difettosa sia stata prodotta nel primo stabilimento?
Soluzione:

Indichiamo con Ω l'insieme di tutte le biro prodotte dalla fabbrica, con S_1 l'insieme delle biro prodotte dal primo stabilimento, con S_2 l'insieme delle biro prodotte dal secondo stabilimento, con S_3 l'insieme delle biro prodotte dal terzo stabilimento e con D l'insieme delle biro che presentano dei difetti.
Abbiamo dunque:

$$P(S_1) = 0.5, \quad P(S_2) = 0.3, \quad P(S_3) = 0.2,$$

$$P(D|S_1) = 0.03, \quad P(D|S_2) = 0.05, \quad P(D|S_3) = 0.06.$$

Vogliamo calcolare la probabilità condizionata $P(S_1|D)$. Utilizziamo la formula di Bayes:

$$P(S_1|D) = \frac{P(D|S_1)P(S_1)}{P(D)},$$

dove

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|S_1)P(S_1) + P(D|S_2)P(S_2) + P(D|S_2)P(S_2) \\ &= 0.03 * 0.5 + 0.05 * 0.3 + 0.06 * 0.2 = 0.042 \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$P(S_1|D) = \frac{P(D|S_1)P(S_1)}{P(D)} = \frac{0.03 * 0.5}{0.042} = \frac{15}{42}$$