Complementi di Analisi Matematica

14 aprile 2014

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}_\lambda(x,y) = (5x + \lambda y, 2x - 2y^2)$, dove $\lambda \in \mathbf{R}$ è un parametro reale.

- calcolare il lavoro di $\mathbf{F}_\lambda$ lungo l'arco di curva piana di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \qquad t \in [0,1]$$

- determinare per quale valore del parametro λ il campo è conservativo e calcolarne un potenziale.

Soluzione:

- Il lavoro del campo $\mathbf{F}_\lambda$ lungo l'arco di curva è dato da:

$$\int_0^1 \mathbf{F}_\lambda(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_0^1 (5t^2 + \lambda t^3, 2t^2 - 2t^6) \cdot (2t, 3t^2)dt$$
$$= \int_0^1 (10t^3 + 2\lambda t^4 + 6t^4 - 6t^8)dt = \frac{5}{2} + \frac{2\lambda}{5} + \frac{6}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12\lambda + 31}{30}$$

- Dato che $\mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché il campo sia conservativo è :

$$\frac{\partial}{\partial x} F_y = \frac{\partial}{\partial y} F_x,$$

cioé:

$$2 = \lambda.$$

Per tale valore del parametro λ il campo è conservativo e si ha $\mathbf{F}_\lambda(x,y) = (5x + 2y, 2x - 2y^2)$. Per calcolare un potenziale associato $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, imponiamo dapprima la condizione

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x,y) = F_x = 5x + 2y,$$

da cui $U(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy + g(y)$, dove $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione solo della variabile y. Imponiamo poi la seconda condizione

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x,y) = F_y = 2x - 2y^2,$$

da cui otteniamo $2x + g'(y) = 2x - 2y^2$, e dunque un'equazione differenziale per la funzione incognita g della forma $g'(y) = -2y^2$ che ha come soluzione $g(y) = -\frac{2}{3}y^3 + c$, dove $c \in \mathbf{R}$ è una costante arbitraria.
Concludendo, otteniamo:

$$U(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy - \frac{2}{3}y^3 + c.$$

Esercizio 2 (7 punti)
Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y.z) = (x, y, -2z)$ sulla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}\}$ orientata in modo tale che il versore normale $\mathbf{n}$ punti verso l'alto ($\mathbf{n} \cdot \hat{k} > 0$).
Soluzione: Parametriziamo la superfice Σ, porzione di una superficie sferica di raggio 1, tramite gli angoli ϕ e θ delle coordinate polari sferiche:

$$x = \sin\phi \cos\theta, \quad y = \sin\phi \sin\theta, \quad z = \cos\phi.$$

In tal modo l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, che impone l'appartenenza dei punti di Σ alla superfice sferica unitaria, è automaticamente soddisfatta. Imponendo la diseguaglianza $z \geq \frac{1}{2}$, otteniamo una restrizione sull'intervallo in cui può variare l'angolo ϕ. Dalla disequazione infatti $\cos\phi \geq \frac{1}{2}$ otteniamo $\phi \in [0, \pi/3]$. La parametrizzazione di Σ è data dunque dalla mappa $\mathbf{r} : [0, \pi/3] \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi), \qquad \phi \in [0, \pi/3], \theta \in [0, 2\pi].$$

I vettori tangenti a Σ sono:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{r}(\phi, \theta) = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0),$$

mentre il vettore normale è dato da:

$$N(\phi, \theta) = \frac{\partial}{\partial\phi}\mathbf{r}(\phi, \theta) \wedge \frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi).$$

Notiamo che il versore normale che otteniamo con tale parametrizzazione $\mathbf{n} = \frac{N(\phi,\theta)}{\|N(\phi,\theta)\|}$ soddisfa la condizione $\mathbf{n} \cdot \hat{k} > 0$ e orienta quindi la superficie Σ nel modo richiesto.
Il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata Σ può dunque essere calcolato nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&\int\int_{[0,\pi/3]\times[0,2\pi]} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot N(\phi, \theta) d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi} (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, -2\cos\phi) \cdot (\sin^2\phi\cos\theta, \sin^2\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\phi) d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3}\int_0^{2\pi} \left(\sin^3\phi\cos^2\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta - 2\sin\phi\cos^2\phi\right) d\phi d\theta = -\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

É possibile risolvere l'esercizio anche utilizzando opportunamente il teorema della divergenza. Se infattti consideriamo la regione $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ data da:

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2}\}$$

abbiamo che la superficie $\partial\Omega$ bordo di Ω è composta da due parti: la superficie Σ e il cerchio $C := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = \frac{1}{2}\}$ (è conveniente fare un disegno per poter visualizzare questi insiemi). Per il teorema della divergenza abbiamo che

$$\int\int\int_\Omega div\mathbf{F} dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

dove $\mathbf{n}$ indica il versore normale a $\partial\Omega$ uscente da Ω. Inoltre abbiamo che $div(\mathbf{F}) = 0$ e quindi:

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -\int\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Il calcolo del flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superfiie Σ è ricondotto al calcolo del flusso di $\mathbf{F}$ attraverso il cerchio C. Tale superficie è un cerchio di raggio $\sqrt{3}/2$ che giace sul piano $z = 1/2$. Il versore normale a C che punta nella direzione uscente da Ω è $-k = (0, 0, -1)$. Abbiamo dunque:

$$\int\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int\int_C (x, y, -1) \cdot (0, 0, -1) dS = \int\int_C 1 dS = Area(C) = \pi(\sqrt{3}/2)^2 = 3\pi/4.$$

Abbiamo dunque:

$$\int\int_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = -\int\int_{C} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = -\frac{3}{4}\pi.$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare le coordinate (x_G, y_G) del baricentro di una lamina piana triangolare di vertici $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (1, 2)$ e $P_3 = (2, 0)$, se la densità di massa è data dalla funzione $\rho(x, y) = y$.
Soluzione:
Indichiamo con T il triangolo di vertici $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (1, 2)$ e $P_3 = (2, 0)$. Tale insieme può essere descritto analiticamente nel modo seguente:

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 2, 1 - y \le x \le 2 - y/2\}$$

La massa della lamina è data da:

$$M = \int\int_T \rho(x, y)dxdy = \int_0^2 \int_{1-y}^{2-y/2} ydxdy = \int_0^2 y(2 - y/2 - 1 + y)dy = \frac{10}{3}$$

Le coordinate (x_G, y_G) del baricentro sono date da:

$$x_G = \frac{1}{M}\int\int_T x\rho(x, y)dxdy = \frac{3}{10}\int_0^2 \int_{1-y}^{2-y/2} xydxdy = \frac{3}{10}\int_0^2 \frac{y}{2}\left(3 - \frac{3}{4}y^2\right)dy = \frac{9}{20}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int\int_T y\rho(x, y)dxdy = \frac{3}{10}\int_0^2 \int_{1-y}^{2-y/2} y^2dxdy = \frac{3}{10}\int_0^2 y^2\left(1 + \frac{y}{2}\right)dt = \frac{7}{5}$$

Esercizio 4 (7 punti)
Un'urna contiene n palline, numerate da 1 a n. Vengono estratte due palline.
Qual è la probabilità che i 2 numeri estratti differiscano di k (dove $n \ge k + 1$)?
Soluzione

Indichiamo con Ω l'insieme dei possibili risultati, ovvero dell'insieme dei sottoinsiemi formati da due elementi di un insieme con n elementi. In altre parole un elemento di Ω è un sottoinsieme $\{m_1, m_2\}$, dove $m_1, m_2 = 1, ..., n$. Applicando le regole del calcolo combinatorio abbiamo che il numero di elementi di Ω è $\frac{n(n-1)}{2}$.
Se ipotizziamo che l'estrazione non sia truccata e che quindi tutti i risultati siano equiprobabili, la probabilità di un evento $E \subset \Omega$ e data dal rapporto fra i "casi favorevoli" ed i "casi possibili", ovvero dal rapporto fra il numero di elementi di E ed il numero di elementi di Ω. Le coppie $\{m_1, m_2\}$ appartenenti all'evento E "la differenza tra m_1 e m_2 è esattamente k" sono $n - k$. La probabilità cercata è dunque

$$P = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$