Complementi di Analisi Matematica

15 luglio 2014

Esercizio 1 (8 punti)

Si determinino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2(x-y)$ nel triangolo (pieno) di vertici $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-2, -1)$ e $P_3 = (2, -1)$.

Soluzione:

Dato che la funzione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ (infatti è un polinomio), cerchiamo i punti di massimo e minimo assoluto di f nel triangolo pieno T di vertici $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (-2, -1)$ e $P_3 = (2, -1)$ tra:

1. i punti interni in cui $\nabla f = (0, 0)$,
2. i punti del bordo.

1. Per quanto riguarda i punti interni in cui si annulla il gradiente, abbiamo che $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 2xy, -x^2)$. Il gradiente si annulla in tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x = 0$. Di questi sono interni al triangolo quelli per cui la coordinata y è compresa tra -1 e 1. In tutti questi punti la funzione vale $f(0, y) = 0$.

2. Per quanto riguarda il bordo del triangolo T, questo è composto da 3 segmenti, che analizziamo separatamente.

   (a) Segmento congiungente (-2,-1) e (2,-1). Questo è formato dai punti del piano della forma $(x, -1)$, con $x \in [-2, 2]$. La funzione f ristretta a tali punti è $f(x, -1) = x^2(x + 1)$. Abbiamo che $\frac{d}{dx} f(x, 0) = 3x^2 + 2x$ e tale funzione si annulla in $x = 0$ e in $x = -2/3$. In tali punti abbiamo $f(0, -1) = 0$ e $f(-2/3, -1) = 4/27$, mentre negli estremi dell'intervallo $[-2, 2]$ abbiamo $f(2, -1) = 12$ e $f(-2, -1) = -4$.

   (b) Segmento congiungente (0,1) e (2,-1). Questo è formato dai punti del piano della forma $(x, 1 - x)$, con $x \in [0, 2]$. La funzione f ristretta a tali punti è $f(x, 1 - x) = 2x^3 - x^2$. Abbiamo che $\frac{d}{dx} f(x, 0) = 6x^2 - 2x$ e tale funzione si annulla in $x = 0$ e in $x = 1/3$. In tali punti abbiamo $f(0, 1) = 0$ e $f(1/3, 2/3) = -1/27$, mentre negli estremi dell'intervallo $[0, 2]$ abbiamo $f(0, 1) = 0$ e $f(2, -1) = 12$.

   (c) Segmento congiungente (-2,-1) e (0,1). Questo è formato dai punti del piano della forma $(x, 1 + x)$, con $x \in [-2, 0]$. La funzione f ristretta a tali punti è $f(x, 1 + x) = -x^2$. Tale funzione della variabile x, ristretta all'intervallo $[-2, 0]$, ha un punto di massimo in $x = 0$, dove vale $f(0, 1) = 0$, e un punto di minimo in $x = -2$ dove vale $f(-2, -1) = -4$.

Concludendo, il punto di massimo assoluto di f nel triangolo T è (2,-1, 1/3) in cui f vale 12, mentre il punto di minimo assoluto di f nel triangolo T è (-2,-1) in cui f vale -4.

Esercizio 2 (7 punti)

Si determini per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (zy\cos(xy), xz\cos(xy) - \alpha yz, \sin(xy) - y^2)$$

è conservativo. Per tale valore di α si calcoli quindi un potenziale.

Soluzione:

Dato che il campo $\mathbf{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$, che è un dominio semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia conservativo è $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = (0,0,0)$, ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y = \frac{\partial}{\partial y}F_x, \qquad \frac{\partial}{\partial x}F_z = \frac{\partial}{\partial z}F_x, \qquad \frac{\partial}{\partial y}F_z = \frac{\partial}{\partial z}F_y, \tag{1}$$

dove

$$F_x(x,y,z) = zy\cos(xy), \quad F_y(x,y,z) = xz\cos(xy) - \alpha yz, \quad F_z(x,y,z) = \sin(xy) - y^2.$$

Si verifica facilmente che le condizioni (1) sono verificate se $\alpha = 2$. In tal caso il campo $\mathbf{F}$ vale $\mathbf{F}(x,y,z) = (zy\cos(xy), xz\cos(xy) - 2yz, \sin(xy) - y^2)$. Per calcolare un potenziale associato a tale campo, ovvero una funzione $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) = zy\cos(xy), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) = xz\cos(xy) - 2yz, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) = \sin(xy) - y^2, \tag{4}$$

cominciamo col determinare la più generale funzione $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che soddisfi l'equazione (2). Integrando il secondo membro di (2) rispetto alla variabile x otteniamo $U(x,y,z) = z\sin(xy) + g(x,y)$, dove g è una generica funzione di classe C^1 delle variabili y, z.

Imponiamo ora che la funzione U soddisf=i anche l'equazione (3). Otteniamo $zx\cos(xy) + \frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = xz\cos(xy) - 2yz$, da cui $\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = -2yz$ e quindi $g(y,z) = -y^2z + h(z)$, dove h è una generica funzione (di classe C^1 della variabile z). La funzione U è dunque della forma $U(x,y,z) = z\sin(xy) - y^2z + h(z)$. Imponendo

infine che tale funzione soddisfi l'equazione (4), otteniamo $\sin(xy) - y^2 + h'(z) = \sin(xy) - y^2$, da cui $h'(z) = 0$ e quindi $h(z)$ è una costante.
Concludendo il potenziale cercato è $U(x, y, z) = z \sin(xy) - y^2 z + cost.$
Esercizio 3 (8 punti)
Si calcoli il flusso $\int \int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ sulla superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}, z \leq 1\}$, orientata il modo tale che il versore normale $\hat{n}$ soddisfi la diseguaglianza $\hat{n} \cdot \hat{k} \leq 0$.
Soluzione:

Parametrizziamo Σ tramite la mappa $r : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$r(\rho, \theta) = (2\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \rho).$$

I vettori tangenti sono

$$\frac{\partial}{\partial \rho} r(\rho, \theta) = (2\cos\theta, \sin\theta, 1), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} r(\rho, \theta) = (-2\rho \sin\theta, \rho \cos\theta, 0),$$

mentre il vettore normale è :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} r(\rho, \theta) \wedge \frac{\partial}{\partial \theta} r(\rho, \theta) = (-\rho \cos\theta, -2\rho \sin\theta, 2\rho),$$

Per orientare la superficie secondo la prescrizione $\hat{n} \cdot \hat{k} \leq 0$ scegliamo come vettore normale $N(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, 2\rho \sin\theta, -2\rho)$. Il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata Σ è calcolabile come:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(\rho, \theta)) \cdot N(\rho, \theta) d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, -2\rho) \cdot (\rho \cos\theta, 2\rho \sin\theta, -2\rho) d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4\rho^2 d\rho \, d\theta = 4\pi
\end{aligned}$$

Si può ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema della divergenza, notando che Σ è la superfice laterale di un cono $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} \leq z \leq 1\}$, il cui bordo è composto dall'unione di Σ e dell'ellisse $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = 1, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$. Abbiamo dunque

$$\int \int \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx \, dy \, dz = \int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS + \int_B \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale uscente dal cono Ω. Dato che $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ abbiamo:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = -\int_{B} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = -\int\int_{B} (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) dS = 2\, Area(B) = 4\pi.$$

Esercizio 4 (7 punti)

In un mazzo di 20 chiavi si cerca quella giusta provandole a caso una dopo l'altra (e mettendo da parte le chiavi già provate). Qual è la probabilità che si debbano fare esattamente 8 tentativi?

Soluzione: La probabilità di ottenere la chiave giusta all'ottavo tentativo è data dal prodotto di 8 fattori:

$$P = \frac{19}{20}\frac{18}{19}\frac{17}{18}\frac{16}{17}\frac{15}{16}\frac{14}{15}\frac{13}{14}\frac{1}{13} = \frac{1}{20},$$

dove:
il primo fattore è la probabilità di trovare una chiave sbagliata al primo tentativo,
il secondo è la la probabilità di trovare una chiave sbagliata al secondo tentativo se al primo è stata trovata una chiave sbagliata,
il terzo fattore è la la probabilità di trovare una chiave sbagliata al terzo tentativo sapendo che ai primi due è stata trovata una chiave sbagliata.
Si procede in modo analogo fino al settimo fattore, mentre l'ottavo rappresenta la probabilità di trovare la chiave giusta all'ottavo tentativo, sapendo che nei precedenti sono state trovate chiavi sbagliate.