Complementi di Analisi Matematica

18 gennaio 2013

Esercizio 1 (8 punti)

Si determinino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = xyz(x - y + z)$ nel cubo $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Soluzione:

- Esaminiamo prima i punti interni del cubo, ovvero i punti dell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$. I candidati ad essere massimi-minimo assoluti sono i punti tali che $\nabla f = (0, 0, 0)$. Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} yz(2x - y + z) = 0 \\ xz(x - 2y + z) = 0 \\ xy(x - y + 2z) = 0 \end{cases}$$
dato che cerchiamo punti all'interno del cubo, sicuramente $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. dobbiamo allora risolvere il sistema (lineare di tre equazioni in tre incognite)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$
che ha come unica soluzione $x = 0, y = 0, z = 0$. Non ci sono quindi punti stazionari interni.

- Esaminiamo ora i punti sul bordo del cubo, formato da sei facce.

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(0, y, z) = 0$. Su questa faccia la funzione è identicamente uguale a 0.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(x, 0, z) = 0$. Su questa faccia la funzione è identicamente uguale a 0.
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\}$. In questo caso abbiamo che $f(x, y, 0) = 0$. Su questa faccia la funzione è identicamente uguale a 0.
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(1, y, z) = yz(1 - y + z)$. Dobbiamo dunque cercare il massimo

minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x, y) = yz(1 - y + z)$ nel quadrato $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
Per quanto riguarda i punti interni del quadrato, ovvero i punti $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$, imponiamo $\nabla g(y, z) = (0, 0)$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} z(1 - 2y + z) = 0 \\ y(1 - y + 2z) = 0 \end{cases}$$

Dato che stiamo cercando soluzioni tali che $y \neq 0$ e $z \neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} (1 - 2y + z) = 0 \\ (1 - y + 2z) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $y = 1/3, z = -1/3$ che non appartiene all'insime $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$.
Analizziamo ora il bordo del quadrato. Sui segmenti $x = 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1$ e $x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0$ abbiamo che $f = 0$.
Sul segmento $x = 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1$ abbiamo $f(1, 1, z) = z^2$. Il minimo è nel punto z=0 e vale 0, il massimo è per z=1 r vale 1.
$x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1$ abbiamo $f(1, y, 1) = y(2 - y)$, Il minimo è nel punto z=0 e vale 0, il massimo è per z=1 e vale 1.

5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |y = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In questo caso abbiamo che $f(x, 1, z) = xz(x - 1 + z)$. Dobbiamo dunque cercare il massimo minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x, z) = xz(x - 1 + z)$ nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
Per quanto riguarda i punti interni del quadrato, ovvero i punti $0 < x < 1$ e $0 < z < 1$, imponiamo $\nabla g(x, z) = (0, 0)$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} z(2x - 1 + z) = 0 \\ x(x - 1 + 2z) = 0 \end{cases}$$

Dato che stiamo cercando soluzioni tali che $x \neq 0$ e $z \neq 0$, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} (2x - 1 + z) = 0 \\ (x - 1 + 2z) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x = 1/3, z = 1/3$, e $f(1/3, 1, 1/3) = -1/27$.
Analizziamo ora il bordo del quadrato. Sui segmenti $x = 0, y = 1, 0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1, y = 1, z = 0$ abbiamo che $f = 0$.
Il segmento segmento $x = 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1$ è stato studiato al punto 4 (abbiamo $f(1, 1, z) = z^2$. Il minimo è nel punto (1,1,0) e vale 0, il massimo è in (1,1,1) e vale 1. Sul segmento $0 \leq x \leq 1, y = 1 \leq 1, z = 1$

abbiamo $f(x,1,1) = x^2$, Il minimo è nel punto x=0 e vale 0, il massimo è per x=1 e vale 1.

6. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq zyleq1\}$. In questo caso abbiamo che $f(1,y,z) = xy(x-y+1)$. Dobbiamo dunque cercare il massimo minimo assoluto della funzione di due variabili $g(x,y) = xy(x-y+1)$ nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
   Per quanto riguarda i punti interni del quadrato, ovvero i punti $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$, imponiamo $\nabla g(x,y) = (0,0)$. Dobbiamo dunque risolvere il sistema
$$\begin{cases} y(2x-y+1) = 0 \\ x(x-2y+1) = 0 \end{cases}$$
   Dato che stiamo cercando soluzioni tali che $y \neq 0$ e $x \neq 0$, il sistema si riduce a
$$\begin{cases} (2x-y+1) = 0 \\ (x-2y+1) = 0 \end{cases}$$
   che ha come soluzione $y = 1/3, x = -1/3$ che non appartiene all'insime $0 < y < 1$ e $0 < x < 1$.
   Analizziamo ora il bordo del quadrato. Sui segmenti $0 \leq x \leq 1, y = 0, z = 1$ e $x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1$ abbiamo che $f = 0$.
   Il segmento $z = 1, y = 1, 0 \leq x \leq 1$ è stato studiato al punto 5 (il minimo è in (0,1,1) e vale 0, il massimo è in (1,1,1) e vale 1). Il segmento $z = 1, x = 1, 0 \leq y \leq 1$ è stato studiato al punto 4 (il minimo è in (1,0,1) e vale 0, il massimo è in (1,1,1) e vale 1).

Concludento il punto di massimo assoluto di f su Q è (1,1,1) dove la funzione vale 1, il punto di minimo assoluto di f su Q è (1/3,1,1/3) dove la funzione vale -1/27.

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcoli l'integrale $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$ e Ω è il cono
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} \leq z \leq 1\}$$

Soluzione: Integrando per fili
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int_D \left(\int_{\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}}^1 z(x^2+y^2)dz \right) dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$. Abbiamo dunque:

$$\int\int_D \left(\int_{\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}}^1 z(x^2+y^2)dz \right) dxdy = \int\int_D (x^2+y^2)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right) dxdy$$

Utilizzando le coordinate cilindriche nel piano $x = 2\rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, $\rho \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi]$, otteniamo

$$\int_0^1 \int_0^{3\pi} (4\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)(i - \rho^2)\rho \, d\rho d\theta$$
$$= \int_0^1 (\rho^3 - \rho^5)d\rho \int_0^{2\pi} (4\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)(4\pi + \pi) = \frac{5}{12}\pi$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si calcoli il flusso $\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ sulla superficie cilindrica $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, orientata il modo tale che il versore normale $\hat{n}$ punti verso l'esterno del cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Soluzione: Parametrizziamo la superfice Σ nel seguente modo:

$$r(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t), \qquad \theta \in [0, 2\pi], t \in [0,1]$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, t) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\frac{\partial r}{\partial t}(\theta, t) = (0,0,1)$$
$$N(\theta, t) = \frac{\partial r}{\partial \theta}(\theta, t) \wedge \frac{\partial r}{\partial t}(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

Notiamo che il vettore normale punta effettivamente verso l'esterno del cilindro C. Abbiamo dunque

$$\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (cos^3\theta, \sin^3\theta, t^3)(\cos\theta, \sin\theta, 0)dtd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (cos^4\theta + \sin^4\theta)dtd\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Esercizio 4 (7 punti)

Un'urna contiene 6 palline, numerate dall'1 al 6. Fissato un numero naturale n, con $3 \leq n \leq 11$, si consideri la variabile aleatoria X definita nel seguente modo. Si estraggono due palline, se la somma dei risultati è minore o uguale a n, allora $X = 4$, mentre se la somma dei risultati è strettamente maggiore di n, allora $X = -1$. Per quale valore di n il valore di aspettazione di X è nullo?

Soluzione: Calcoliamo la distribuzione di X al variare di n:

- $n = 3$: $P(X = 4) = 1/15$, $P(x = -1) = 14/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{4}{15} - \frac{14}{15} = -\frac{2}{3}$.
- $n = 4$: $P(X = 4) = 1/15$, $P(x = -1) = 14/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{4}{15} - \frac{14}{15} = -\frac{2}{3}$.
- $n = 5$: $P(X = 4) = 2/15$, $P(x = -1) = 13/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{8}{15} - \frac{13}{15} = -\frac{1}{3}$.
- $n = 6$: $P(X = 4) = 2/15$, $P(x = -1) = 13/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{8}{15} - \frac{13}{15} = -\frac{1}{3}$
- $n = 7$: $P(X = 4) = 3/15$, $P(x = -1) = 12/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{12}{15} - \frac{12}{15} = 0$.
- $n = 8$: $P(X = 4) = 2/15$, $P(x = -1) = 13/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{8}{15} - \frac{13}{15} = -\frac{1}{3}$.
- $n = 9$: $P(X = 4) = 2/15$, $P(x = -1) = 13/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{8}{15} - \frac{13}{15} = -\frac{1}{3}$.
- $n = 10$: $P(X = 4) = 1/15$, $P(x = -1) = 14/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{4}{15} - \frac{14}{15} = -\frac{2}{3}$.
- $n = 11$: $P(X = 4) = 1/15$, $P(x = -1) = 14/15$. Quindi $\mathbb{E}[X] = \frac{4}{15} - \frac{14}{15} = -\frac{2}{3}$.

Possiamo dunque dire che $\mathbb{E}[X] = 0$ se e solo se $n = 7$