Soluzioni appello scritto del 10 febbraio 2016

Esercizio 1

Si consideri la curva piana γ (cicloide) di parametrizzazione $\alpha(t) = (3(t - \sin t), 3(1 - \cos t))$, $t \in [0, 6\pi)$.

1. Rappresentare graficamente γ.

2. La curva è regolare? Motivare la risposta.

3. Considerando solo l'arco di γ in cui il parametro t appartiene all'intervallo $(0, 2\pi)$, calcolare versore tangente, versore normale e curvatura e determinare il punto in cui la curvatura è minima.

Soluzione:

1. Il grafico della curva γ è rappresentato in fig.1

2. La parametrizzazione $\alpha : [0, 6\pi) \to \mathbb{R}^2$ non è regolare in quanto la norma del vettore tangente $\alpha'(t) = 3(1 - \cos t, \sin t)$, cioé $\|\alpha'(t)\|^2 = 9\,(2 - 2\cos t)$ si annulla in $t = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ e all'interno dell'intervallo $[0, 6\pi)$ ci sono dei punti che verificano questa condizione.

3. Il versore tangente, per $t \in (0, 2\pi)$, è dato da:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}}(1 - \cos t, \sin t)$$

   Per calcolare agevolmente il versore normale e la curvatura, riguardiamo la curva piana γ come una curva in $\mathbb{R}^3$ di parametrizzazione $\alpha(t) = (3(t - \sin t), 3(1 - \cos t), 0)$ e utilizziamo la formula

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{(1 - \cos t)^{-1/2}}{6\sqrt{2}}$$

   Calcolando il versore binormale $B(t)$ tramite la formula $B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$ otteniamo $B(t) = -\hat{e}_z$, mentre il versore normale $N(t)$ è dato dalla formula

$$N(t) = B(t) \wedge T(t) = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos t}}(\sin t, -1 + \cos t)$$

   Per trovare il punto di minimo della curvatura, cerchiamo il punto di minimo della funzione $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \cos t}}$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$. Questo è equivalente a cercare il massimo della funzione $t \mapsto 1 - \cos t$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$, che vale 2 e viene raggiunto per $t = \pi$. Il punto dell'arco di curva in cui k è minima è quindi il punto $\alpha(\pi) = (3\pi, 6)$.

Esercizio 2

Si calcoli il volume della parte della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ interna all cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$

Soluzione: Notiamo innanzitutto che la base del cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$ è il cerchio C di equazione $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$, centrato in $(0, 1)$ e di raggio $R = 1$. Integrando per fili, il volume della parte di sfera contenuta nel cilindro è calcolabile come:

$$\begin{aligned} V &= \int\int_C \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dxdy \\ &= \int\int_C \left(2\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right) dxdy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -(4-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^{2\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi}(8-8|\cos\theta|^3) = 16\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)d\theta = 16\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

dove, per calcolare l'integrale doppio sul cerchio C, sono state utilizzate le coordinate polari nel piano.

Esercizio 3 Calcolare i punti critici della funzione $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x + 1$ e determinare se sono punti di massimo locale, di minimo locale o di sella.

Soluzione: Per trovare i punti critici di f, cioé i punti in cui $\nabla f = (0,0,0)$, risolviamo il sistema

$$
\begin{cases} 2xy - 2 = 0 \\ x^2 + 2yz = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases}
$$

che ha come unica soluzione il punto $(1,1,-1/2)$.

Per determinare se si tratta di massimo locale, minimo locale o sella, calcoliamo la matrice Hessiana

$$
H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix}
$$

nel punto critico, ottenendo

$$
H(1,1,-1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

Per studiare il segno degli autovalori, utilizziamo il criterio dei minori nord-ovest, ottenendo

$$
\det(2) > 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -6 < 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -20 < 0,
$$

da cui possiamo concludere che la matrice $H(1,1,-1/2)$ è indefinita e quindi il punto $(1,1,-1/2)$ è un punto di sella.

Esercizio 4

Sia Σ la superficie grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ contenuta all'interno del cilindro $x^2+y^2 \leq 1$, orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ soddisfi la diseguaglianza $\hat{n}\cdot\hat{e}_z > 0$. Si calcoli il flusso attraverso Σ del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x,0,0)$

Soluzione: La superficie Σ può essere parametrizzata con $r: D \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$
r(x,y) = (x,y,x^2-y^2), \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}
$$

I vettori tangenti sono0

$$
\frac{\partial}{\partial x}r(x,y) = (1,0,2x), \qquad \frac{\partial}{\partial y}r(x,y) = (0,1,-2y),
$$

mentre il vettore normale è dato da

$$
N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}r(x,y) \wedge \frac{\partial}{\partial y}r(x,y) = (-2x, 2y, 1),
$$

che soddisfa la diseguaglianza $N(x,y)\cdot\hat{e}_z > 0$.

Il flusso del campo F attraverso Σ è dato da

$$
\int\int_D F(x,y,x^2-y^2)\cdot(-2x,2y,1)dxdy = -2\int\int_D x^2dxdy = -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cos^2\theta d\rho d\theta = -\frac{\pi}{2}
$$

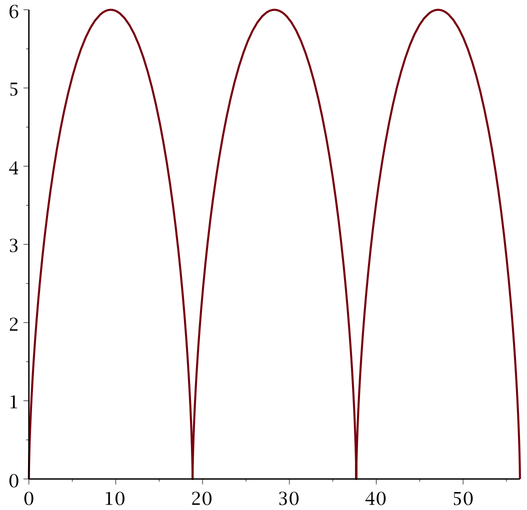

Fig 1 la curva γ di parametrizzazione $\alpha(t) = (3(t - \sin t), 3(1 - \cos t))$, $t \in [0, 6\pi)$.