Complementi di Analisi Matematica

20 gennaio 2012

Esercizio 1 (7 punti)

Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = (-2y, x)$$

lungo la curva chiusa, percorsa in senso antiorario, composta da:

- l'arco di circonferenza di centro (0,0) e raggio $\sqrt{2}$ situato nel semipiano $y \geq 0$ congiungente il punto (1,1) con il punto $(-\sqrt{2}, 0)$
- il segmento che collega il punto $(-\sqrt{2}, 0)$ con il punto (1,1).

Soluzione: La curva è composta da due pezzi: l'arco di circonferenza, parametrizzabile ad esempio come

$$\alpha_A(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta), \qquad \theta \in [\pi/4, \pi]$$

e il segmento che collega il punto $(-\sqrt{2}, 0)$ con il punto (1,1), parametrizzabile ad esempio come

$$\alpha_B(t) = \left(-\sqrt{2} + t(1 + \sqrt{2}), t\right), \qquad t \in [0, 1]$$

Il lavoro totale è dato da

$$\begin{aligned}
& \int_{\pi/4}^{\pi} \left(-2\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta\right) d\theta + \\
& + \int_0^1 \left(-2t, -\sqrt{2} + t(1 + \sqrt{2})\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2}, 1\right) dt \\
= & \int_{\pi/4}^{\pi} \left(+4\sin^2\theta + 2\cos^2\theta\right) d\theta + \int_0^1 \left(-2(1 + \sqrt{2})t - \sqrt{2} + t(1 + \sqrt{2})\right) dt \\
= & \frac{1}{2} + \frac{9}{4}\pi - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{4}\pi - \frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti) Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$, dove $f(x, y, z) = xy + z$ e

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 - \sqrt{z} \leq 0\right\}$$

Soluzione: Possiamo integrare per strati:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 dz \int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

dove $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \sqrt{z}\}$ è il cerchio di centro (0,0) e raggo $z^{1/4}$. Quindi, utilizzando le coordinate polari nel piano:

$$\int\int_{D_z} (xy + z)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{z^{1/4}} (\rho^2 \cos\theta \sin\theta + z)\rho d\rho d\theta = \pi z^{3/2}$$

e dunque

$$\int_0^1 dz \int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy = \int_0^1 \pi z^{3/2} dz = \frac{2\pi}{5}$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ ristretta alla curva di equazione $x^4 + y^4 = 1$.

Soluzione: Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo trovare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ sotto il vincolo $g(x,y) = 0$, con $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. Il metodo è applicabile perchè f e g sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla g \neq (0,0)$ sulla curva definita da $x^4 + y^4 - 1 = 0$. La Lagrangiana è data da $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - 1)$. Bisogna quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 4\lambda x^3 = 0 \\ 2x^2y - 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x(y^2 - 2\lambda x^2) = 0 \\ 2y(x^2 - 2\lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha otto soluzioni:

$$x = 0, y = 1, \quad x = 0, y = -1, \quad x = 1, y = 0, \quad x = -1, y = 0,$$

$$x = \frac{1}{2^{1/4}}, y = \frac{1}{2^{1/4}}, \quad x = \frac{1}{2^{1/4}}, y = -\frac{1}{2^{1/4}}, \quad x = -\frac{1}{2^{1/4}}, y = \frac{1}{2^{1/4}}, \quad x = -\frac{1}{2^{1/4}}, y = -\frac{1}{2^{1/4}},$$

Abbiamo che

$$f(0,1) = f(0,-1) = f(1,0) = f(-1,0) = 0$$

e quindi $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ sono punti di minimo assoluto, mentre

$$f\left(\frac{1}{2^{1/4}}, \frac{1}{2^{1/4}}\right) = f\left(-\frac{1}{2^{1/4}}, \frac{1}{2^{1/4}}\right) = f\left(\frac{1}{2^{1/4}}, -\frac{1}{2^{1/4}}\right) = f\left(-\frac{1}{2^{1/4}}, -\frac{1}{2^{1/4}}\right) = \frac{1}{2}$$

e quindi $\left(\frac{1}{2^{1/4}}, \frac{1}{2^{1/4}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2^{1/4}}, \frac{1}{2^{1/4}}\right)$, $\left(\frac{1}{2^{1/4}}, -\frac{1}{2^{1/4}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2^{1/4}}, -\frac{1}{2^{1/4}}\right)$ sono punti di massimo assoluto.

Esercizio 4 (7 punti)

Si fanno due estrazioni da un'urna contenente 5 palline gialle e 3 blu. Dopo la prima estrazione la pallina estratta non viene reinserita nell'urna. Calcolare la probabilità che:

1. le palline estratte siano entrambe gialle;
2. la prima pallina estratta sia gialla e la seconda sia blu;
3. una sia gialla e una sia blu.

Soluzione:

Indichiamo con E1 l'evento "le palline estratte sono entrambe gialle", con E2 l'evento "la prima pallina estratta è gialla e la seconda è blu" e con E3 l'evento "una pallina estratta è gialla e l'altra pallina è blu".

Indichiamo con G1 l'evento "la prima pallina estratta è gialla", con B1 l'evento "la prima pallina estratta è blu", con G2 l'evento "la seconda pallina estratta è gialla"e con B2 l'evento "la seconda pallina estratta è blu". Allora l'evento E1 è dato dall'intersezione degli eventi G1 e G2, quindi:

$$P(E1) = P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2|G_1) = \frac{5}{8}\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

Analogamente l'evento E2 è dato dall'intersezione degli eventi G1 e B2, quindi:

$$P(E2) = P(G_1 \cap B_2) = P(G_1)P(B_2|G_1) = \frac{5}{8}\frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

Infine l'evento E3 è dato dall'unione dei due eventi ioncompatibili "la prima pallina estratta è gialla e la seconda è blu" e "la prima pallina estratta è blu e la seconda è gialla". Quindi :

$$P(E_3) = P(G_1)P(B_2|G_1) + P(B_1)P(G_2|B_1) = \frac{5}{8}\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{30}{56}$$