Complementi di Analisi Matematica

20 gennaio 2012

Esercizio 1 (7 punti)

Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, 3x)$$

lungo la curva chiusa, percorsa in senso antiorario, composta da:

- l'arco di circonferenza di centro (0,0) e raggio $\sqrt{2}$ situato nel semipiano $y \geq 0$ congiungente il punto $(\sqrt{2}, 0)$ con il punto (-1,1)
- il segmento che collega il punto (-1,1) con il punto $(\sqrt{2}, 0)$.

Soluzione: La curva è composta da due pezzi: l'arco di circonferenza, parametrizzabile ad esempio come

$$\alpha_A(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 3\pi/4]$$

e il segmento che collega il punto $(-1, 1)$ con il punto $(\sqrt{2}, 0)$, parametrizzabile ad esempio come

$$\alpha_B(t) = \Big(-1 + t(1 + \sqrt{2}), 1 - t\Big), \qquad t \in [0, 1]$$

Il lavoro totale è dato da

$$\begin{aligned}
& \int_0^{3\pi/4} \Big(-\sqrt{2}\sin\theta, 3\sqrt{2}\cos\theta\Big) \cdot \Big(-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta\Big)\, d\theta + \\
& + \int_0^1 \Big(-1 + t, -3 + 3t(1 + \sqrt{2})\Big) \cdot \Big(1 + \sqrt{2}, -1\Big)\, dt \\
= \; & \int_0^{3\pi/4} \big(+2\sin^2\theta + 6\cos^2\theta\big)\, d\theta + \int_0^1 \Big((1 + \sqrt{2})(t - 1) + 3 - 3t(1 + \sqrt{2})\Big)\, dt \\
= \; & 3\pi - 1 - 2\sqrt{2} + 1 = 3\pi - 2\sqrt{2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Esercizio 2 (8 punti)

Calcolare l'integrale triplo $\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$, dove $f(x, y, z) = 2xy - z$ e

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 - \sqrt{3z} \leq 0\Big\}$$

Soluzione: Possiamo integrare per strati:

$$\int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 dz \int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

dove $D_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq \sqrt{3z}\right\}$ è il cerchio di centro (0,0) e raggo $(3z)^{1/4}$. Quindi, utilizzando le coordinate polari nel piano:

$$\int\int_{D_z} (2xy - z)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{(3z)^{1/4}} (2\rho^2\cos\theta\sin\theta - z)\rho d\rho d\theta = -\sqrt{3}\pi z^{3/2}$$

e dunque

$$\int_0^1 dz \int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy = -\sqrt{3}\int_0^1 \pi z^{3/2}dz = -\frac{2\sqrt{3}}{5}\pi$$

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ ristretta alla curva di equazione $x^4 + y^4 = 2$.

Soluzione: Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo trovare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ sotto il vincolo $g(x,y) = 0$, con $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2$. Il metodo è applicabile perchè f e g sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla g \neq (0,0)$ sulla curva definita da $x^4 + y^4 - 2 = 0$. La Lagrangiana è data da $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - 2)$. Bisogna quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 4\lambda x^3 = 0 \\ 2x^2y - 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x(y^2 - 2\lambda x^2) = 0 \\ 2y(x^2 - 2\lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

che ha otto soluzioni:

$$x = 0, y = 2^{1/4}, \quad x = 0, y = -2^{1/4}, \quad x = 2^{1/4}, y = 0, \quad x = -2^{1/4}, y = 0,$$

$$x = 1, y = 1, \quad x = 1, y = -1, \quad x = -1, y = 1, \quad x = -1, y = -1,$$

Abbiamo che

$$f(0, 2^{1/4}) = f(0, -2^{1/4}) = f(2^{1/4}, 0) = f(-2^{1/4}, 0) = 0$$

e quindi $(0, 2^{1/4})$, $(0, -2^{1/4})$, $(2^{1/4}, 0)$, $(-2^{1/4}, 0)$ sono punti di minimo assoluto, mentre

$$f(1,1) = f(1,-1) = f(-1,1) = f(-1,-1) = 1$$

e quindi (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1) sono punti di massimo assoluto.
Esercizio 4 (7 punti)
Si fanno due estrazioni da un'urna contenente 4 palline gialle e 7 blu. Dopo la prima estrazione la pallina estratta non viene reinserita nell'urna. Calcolare la probabilità che:

1. le palline estratte siano entrambe gialle;
2. la prima pallina estratta sia gialla e la seconda sia blu;
3. una sia gialla e una sia blu.

Soluzione:

Indichiamo con E1 l'evento "le palline estratte sono entrambe gialle", con E2 l'evento "la prima pallina estratta è gialla e la seconda è blu" e con E3 l'evento "una pallina estratta è gialla e l'altra pallina è blu".

Indichiamo con G1 l'evento "la prima pallina estratta è gialla", con B1 l'evento "la prima pallina estratta è blu", con G2 l'evento "la seconda pallina estratta è gialla"e con B2 l'evento "la seconda pallina estratta è blu". Allora l'evento E1 è dato dall'intersezione degli eventi G1 e G2, quindi:

$$P(E1) = P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2|G_1) = \frac{4}{11}\frac{3}{10} = \frac{12}{110}$$

Analogamente l'evento E2 è dato dall'intersezione degli eventi G1 e B2, quindi:

$$P(E2) = P(G_1 \cap B_2) = P(G_1)P(B_2|G_1) = \frac{4}{11}\frac{7}{10} = \frac{28}{110}$$

Infine l'evento E3 è dato dall'unione dei due eventi incompatibili "la prima pallina estratta è gialla e la seconda è blu" e "la prima pallina estratta è blu e la seconda è gialla". Quindi :

$$P(E_3) = P(G_1)P(B_2|G_1) + P(B_1)P(G_2|B_1) = \frac{4}{11}\frac{7}{10} + \frac{7}{11}\frac{4}{10} = \frac{56}{110}$$