Complementi di Analisi Matematica

21 dicembre 2012

Esercizio 1 (7 punti)

Determinare per quale valore del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(y + 4x^3, \alpha x - z, -y + 3z^2\big)$$

è conservativo. Per tale valore di α calcolare un potenziale.

Soluzione:

Dato che il campo $\mathbf{F}$ è di classe C^1 (infatti le sue componenti sono funzioni polinomiali) su $\mathbb{R}^3$, che è un insieme semplicemente connesso, abbiamo che $\mathbf{F}$ è conservativo se e solo se $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = (0,0,0)$. Questo equivale a chiedere che per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y,z), \\
\frac{\partial}{\partial x} F_z(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z} F_x(x,y,z), \\
\frac{\partial}{\partial y} F_z(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z} F_y(x,y,z),
\end{aligned}$$

dove F_x, F_y, F_z sono le tre componenti del campo vettoriale $\mathbf{F}$:

$$F_x(x,y,z) = y + 4x^3, \qquad F_y(x,y,z) = \alpha x - z, \qquad F_z(x,y,z) = -y + 3z^2.$$

Dato che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y,z) &= \alpha, & \frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y,z) &= 1, \\
\frac{\partial}{\partial x} F_z(x,y,z) &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} F_x(x,y,z) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial y} F_z(x,y,z) &= -1, & \frac{\partial}{\partial z} F_y(x,y,z) &= -1
\end{aligned}$$

affinché $\mathbf{F}$ sia conservativo, dobbiamo imporre $\alpha = 1$.

Calcoliamo ora un potenziale U per il campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y + 4x^3, x - z, -y + 3z^2)$. Imponendo la condizione $\frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z) = y + 4x^3$ otteniamo che:

$$U(x,y,z) = xy + x^4 + g(y,z).$$

Imponendo la condizione $\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) = x - z$ otteniamo che:

$$x + \frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = x - z$$

quindi $\frac{\partial}{\partial y}g(y,z) = -z$ e g ha la forma $g(y,z) = -zy + h(z)$.
Infine imponendo la condizione $\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) = -y + 3z^2$ otteniamo che $h'(z) = 3z^2$, quindi $h(z) = z^3 + costante$ e

$$U(x,y,z) = xy + x^4 - zy + z^3 + costante$$

Esercizio 2 (8 punti)

Si calcoli l'integrale $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,z) = |x+y|$ e

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2+y^2 \leq 4, \; \frac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$$

Soluzione: Integrando per fili si ha che

$$\begin{aligned} \int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \int\int_C \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{1+x^2+y^2} |x+y|dz \right) dxdy \\ &= \int\int_C \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right) |x+y|dxdy \end{aligned}$$

dove C è il sottoinsieme del piano x, y:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Dato che $|x+y| = x+y$ se $y > -x$ e $|x+y| = -x-y$ se $y < -x$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int\int_C \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right) |x+y|dxdy &= \int\int_{C_1} \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right) (x+y)dxdy + \\ &\quad - \int\int_{C_2} \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right) (x+y)dxdy, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2+y^2 \leq 4, y > -x\}, \\ C_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2+y^2 \leq 4, y < -x\}. \end{aligned}$$

Utilizzando le coordinate polari nel piano:

$$\begin{aligned}
\int\int_{C_1}\left(1+\frac{x^2+y^2}{2}\right)(x+y)dxdy &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^2(1+\rho^2/2)(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta\\
&= \int_0^2(1+\rho^2/2)\rho^2 d\rho\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=\frac{88}{15}2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_{C_2}\left(1+\frac{x^2+y^2}{2}\right)(x+y)dxdy &= \int_{3\pi/4}^{7\pi/4}\int_0^2(1+\rho^2/2)(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta\\
&= \int_0^2(1+\rho^2/2)\rho^2 d\rho\int_{3\pi/4}^{7\pi/4}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=-\frac{88}{15}2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int\int_{C}\left(1+\frac{x^2+y^2}{2}\right)|x+y|dxdy=\frac{352}{15}\sqrt{2}$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si consideri la superfice Σ del toro, di equazione parametrica

$$r(\phi,\theta)=(-\sin\phi(3+\cos\theta),\cos\phi(3+\cos\theta),\sin\theta)\,,\qquad(\phi.\theta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi].$$

a Si calcoli l'integrale di superficie $\int\int_\Sigma fdS$ della funzione $f(x,y,z)=1+z$

b Si calcoli il flusso uscente $\int\int_\Sigma \mathbf{F}\cdot\hat{n}dS$ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,0,x^2+y^2)$.

Soluzione: I due vettori tangenti alla superficie Σ sono:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}r(\phi,\theta)=(-\cos\phi(3+\cos\theta),-\sin\phi(3+\cos\theta),0)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}r(\phi,\theta)=(\sin\phi\sin\theta,-\cos\phi\sin\theta),\cos\theta)$$

mentre il vettore normale $N(\phi,\theta)=\frac{\partial}{\partial\phi}r\wedge\frac{\partial}{\partial\theta}r$ è

$$N(\phi,\theta)=(3+\cos\theta)(-\sin\phi\cos\theta,\cos\phi\cos\theta,\sin\theta)$$

e $\|N(\phi,\theta)\|=(3+\cos\theta)$. Quindi

$$\int\int_\Sigma fdS=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)(3+\cos\theta)d\phi d\theta=12\pi^2$$

Per calcolare il flusso uscente dalla superficie Σ del campo vettoriale $\mathbf{F}$, dato che Σ è una superficie chiusa, bordo di una regione Ω (il toro), abbiamo che

$$\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F}) dxdydz$$

dato che $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 0$ l'integrale al secondo membro è identicamente nullo e quindi $\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n} dS = 0$.

Esercizio 4 (7 punti)

Un'urna contiene 10 palline, numerate dall'1 al 10. Si effettuano 2 estrazioni e dopo la prima estrazione la pallina estratta non viene reinserita nell'urna. Calcolare la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi. Come cambia tale valore se dopo la prima estrazione la pallina viene reinserita nell'urna?

Soluzione: Calcoliamo la probabilità come il rapporto fra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili.

Nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta non viene reinserita nell'urna le possibili coppie di numeri estratti sono $10 * 9 = 90$, mentre le possibili coppie di numeri consecutivi sono $8 * 2 + 2 = 18$. La probabilità cercate è quindi $18/90$.

Nel caso in cui dopo la prima estrazione la pallina estratta viene reinserita nell'urna le possibili coppie di numeri estratti sono $10 * 10 = 100$, mentre le possibili coppie di numeri consecutivi sono sempre $8*2+2 = 18$. La probabilità cercate è quindi $18/100$.