Complementi di Analisi Matematica
23 giugno 2014

Esercizio 1 (7 punti) Si calcolino, punto per punto, versore tangente, versore normale e curvatura dell'arco di curva regolare $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t\sin t, t, t\cos t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione:

$$\alpha'(t) = (\sin t + t\cos t, 1, \cos t - t\sin t), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2+t^2},$$
$$\alpha''(t) = (2\cos t - t\sin t, 0, -2\sin t - t\cos t),$$
$$\alpha'(t)\wedge\alpha''(t) = (-2\sin t - t\cos t, 2+t^2, t\sin t - 2\cos t), \quad \|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\| = \sqrt{t^4+5t^2+8}$$

Abbiamo dunque:

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(\sin t + t\cos t, 1, \cos t - t\sin t)}{\sqrt{2+t^2}}$$

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{t^4+5t^2+8}}{(2+t^2)^{3/2}}$$

infine

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}\wedge T(t) \\ &= \frac{(4\cos t - 3t\sin t + t^2\cos t - t^3\sin t, -t, -4\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t - t^3\cos t)}{\sqrt{2+t^2}\sqrt{t^4+5t^2+8}} \end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si calcolino le coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro di un cono $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ di densità $\rho(x,y,z) = z^2$

Soluzione:

Per calcolare la massa del cono, impostiamo l'integrale di volume

$$M = \int\int\int_C \rho(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_C z^2\,dxdydz$$

integrando per strati abbiamo

$$M = \int_0^1 \left(\int\int_{\Omega_z} z^2\,dxdy\right) dz$$

dove $\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-z\}$. Abbiamo dunque

$$M = \int_0^1 z^2 \left(\int\int_{\Omega_z} dxdy \right) dz = \int_0^1 z^2 \pi (1-z)^2 dz = \frac{\pi}{30}$$

Per il calcolo delle coordinate (x_G, y_G, z_G) del baricentro impostiamo gli integrali

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M} \int\int\int_C x\rho(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^1 z^2 \left(\int\int_{\Omega_z} xdxdy \right) dz = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M} \int\int\int_C y\rho(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^1 z^2 \left(\int\int_{\Omega_z} ydxdy \right) dz = 0 \\
z_G &= \frac{1}{M} \int\int\int_C z\rho(x,y,z)dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^1 z^3 \left(\int\int_{\Omega_z} dxdy \right) dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^1 z^3 \pi (1-z)^2 dz = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si calcoli l'area della superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ grafico della funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 2y$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2\}$.

Soluzione: Parametrizziamo Σ tramite la funzione $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$r(x,y) = (x, y, x^2 - 2x + y^2 + 2y), \qquad (x,y) \in D$$

i vettori tangenti sono

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x,y) = (1, 0, 2x-2), \quad \frac{\partial}{\partial xy} r(x,y) = (0, 1, 2y+2),$$

e il vettore nomale alla superficie è

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} r(x,y) \wedge \frac{\partial}{\partial y} r(x,y) = (-2x+2, -2y-2, 1)$$

L'area di Σ è calcolabile come

$$A(\Sigma) = \int\int_D \|N(x,y)\| dxdy = \int\int_D \sqrt{1 + 4(x-1)^2 + 4(y+1)^2} dxdy$$

Per calcolare tale integrale doppio sul cerchio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2+(y+1)^2 \leq 2\}$ centrato in $(1,-1)$ e di raggio $\sqrt{2}$, è conveniente introdurre le coordinate polari ρ, θ, dove

$$x = 1 + \rho\cos\theta, \quad y = -1 + \rho\sin\theta, \qquad \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, \sqrt{2}].$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int\int_D \sqrt{1 + 4(x-1)^2 + 4(y+1)^2}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}(1+4\rho^2)^{3/2}|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{3}\pi \end{aligned}$$

Esercizio 4 (7 punti)

Da un alfabeto composto da n lettere viene formata una parola di lunghezza k scegliendo ogni lettera a caso e in maniera indipendente l'una dall'altra. Si fissi un i, con $1 \leq i \leq n$.

Qual è la probabilità che la i-esima lettera venga usata almeno una volta?

Qual è la probabilità che la i-esima lettera venga usata una sola volta?

Soluzione: Indichiamo con E_1 l'evento "l'i-esima lettera compare almeno una volta" e con E_2 l'evento "l'i-esima lettera compare una volta sola".

Per calcolare $P(E_1)$ il modo più semplice è calcolare la probabilità dell'evento complementare E_1^c= "l'i-esima lettera non compare mai" e utilizzare la formula $P(E_1) = 1 - P(E_1^c)$. Abbiamo dunque:

$$P(E_1) = 1 - P(E_1^c) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

Per calcolare la probabilità di E_2 è conveniente rappresentare tale evento come unione di eventi disgiunti $F_1, F_2, ..., F_K$, dove F_j, per $j = 1, ..., k$, rappresenta l'evento "l'i-esima lettera compare *solamente* al j-esimo posto". Abbiamo dunque:

$$E_2 = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_k,$$

$$F_j \cap F_{j'} = \emptyset, \qquad j \neq j', j, j' = 1, ..., k.$$

Abbiamo dunque

$$P(E_2) = P(F_1) + P(F_2) + ... + P(F_k) = k\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}.$$