Complementi di Analisi Matematica

26 ottobre 2011

Esercizio 1 (8 punti)

Si calcoli, punto per punto, la curvatura della curva piana descritta dall'equazione

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{\log(y)}{2}, \qquad y > 0$$

Soluzione:

Possiamo descrivere la curva tramite la seguente parametrizzazione $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$:

$$\alpha(t) = \Big(\frac{y^2}{4} - \frac{\log(y)}{2}, y, 0\Big)$$

e utilizzare la formula

$$k(y) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$

con:

$$\alpha'(y) = \Big(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}, 1, 0\Big)$$

$$\alpha''(y) = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}, 0, 0\Big)$$

$$\alpha'(y) \wedge \alpha''(y) = \Big(0, 0, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2}\Big)$$

$$\|\alpha'(y)\| = \sqrt{1 + \Big(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\Big)^2} = \frac{\sqrt{2y^2 + y^4 + 1}}{2y} = \frac{y^2 + 1}{2y}$$

$$\|\alpha'(y) \wedge \alpha''(y)\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}$$

Quindi

$$k(y) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2}}{\frac{(y^2+1)^3}{8y^3}} = \frac{4y}{(y^2 + 1)^2}$$

Esercizio 2 (7 punti)
Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2, x^2)$$

e γ è l'arco di ellisse (percorsa in senso antiorario) parametrizzata da

$$\alpha(\theta) = (2\cos(\theta), 3\sin(\theta)) \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (9\sin^2(\theta), 4\cos^2(\theta)) \cdot (- 2\sin(\theta), 3\cos(\theta)) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (- 18\sin^3(\theta) + 12\cos^3(\theta)) d\theta \\
&= -18 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) d\theta + 12 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)(1 - \sin^2(\theta)) d\theta \\
&= -18 \Big(- \cos(\theta)|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3(\theta)}{3}\Big|_0^{\pi/2} \Big) + 12 \Big(\sin(\theta)|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3(\theta)}{3}\Big|_0^{\pi/2} \Big) \\
&= -4
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (7 punti)
Si determinini in quale punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con

$$f(x,y) = 5x^2 + 3xy + y^2 - 2x + 5y$$

il piano tangente è ortogonale alla retta congiungente l'origine $(0,0,0)$ con il punto di coordinate $(-3, 8, -1)$.

Soluzione: Il vettore che dà la direzione della retta congiungente l'origine $(0,0,0)$ con il punto di coordinate $(-3, 8, -1)$ è il vettore $\mathbf{v} = (-3, 8, -1) - (0,0,0) = (-3, 8, -1)$.

Il piano tangente al grafico della funzione f nel punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \tag{1}$$

Ricordiamo che l'equazione di un piano ortogonale ad un vettore $\mathbf{N} = (a, b, c)$ è :

$$ax + by + cz = d$$

D'altra parte l'equazione (1) può essere scritta come:

$$-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y+z=f(x_0,y_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x_0-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y_0 \tag{2}$$

Questa forma mette in evidenza che il piano è ortogonale al vettore

$$\Big(-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},1\Big)$$

L'ortogonalità fra il piano descritto dall'equazione (2) e la retta diretta nella direzione del vettore $\mathbf{v}=(-3,8,-1)$ si ottiene se il vettore $\Big(-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},1\Big)$ è proporzionale al vettore $\mathbf{v}=(-3,8,-1)$, quindi se esiste una costante $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che:

$$\Big(-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},1\Big)=\lambda(-3,8,-1)$$

ovvero

$$\begin{aligned}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}&=-3\lambda\\ -\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}&=8\lambda\\ 1&=-\lambda\end{aligned} \tag{3}$$

Dato che

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}&=10x+3y-2\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}&=3x+2y+5\end{aligned}$$

imponiamo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite λ,x_0,y_0:

$$\begin{aligned}10x_0+3y_0-2&=3\lambda\\ 3x_0+2y_0+5&=-8\lambda\\ 1&=-\lambda\end{aligned} \tag{4}$$

Quindi:

$$\lambda=-1,\qquad x_0=-1,\qquad y_0=3$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^2$ di $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella. **Soluzione**: Prima di tutto calcoliamo i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Le derivate parziali di f sono:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6xy - 12,$$

cerchiamo quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $y = 2/x$, che, sostituita nella prima equazione dà

$$3x^2 + \frac{12}{x^2} = 15$$

ovvero

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Otteniamo quindi 4 possibili valori per la coordinata x:

$$x = 1, \qquad x = -1, \qquad x = 2, \qquad , x = -2$$

e, dato che la relazione fra la coordinata x e la coordinata y dei punti stazionari è $y = 2/x$, i quattro punti stazionari sono:

$$(2,1), \qquad (-2,-1), \qquad (1,2), \qquad (-1,-2)$$

Cerchiamo ora di capire se sono di massimo relativo, di minimo relativo o di sella. La matrice Hessiana è :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

Per il primo punto stazionario abbiamo:

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Dato che $\mathrm{Det}(H_f(1,2) < 0$ abbiamo due autovalori di segno discorde, la matrice è indefinita e il punto $(1,2)$ è una sella.

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

Dato che $\mathrm{Det}(H_f(-1,-2) < 0$ abbiamo due autovalori di segno discorde, la matrice è indefinita e il punto $(-1,-2)$ è una sella.

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Dato che $\mathrm{Det}(H_f(2,1) > 0$ e $\mathrm{Tr}(H_f(2,1) > 0$, abbiamo due autovalori positivi, la matrice è definita positiva e il punto $(1,2)$ di minimo locale.

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Dato che $\mathrm{Det}(H_f(2,1) > 0$ e $\mathrm{Tr}(H_f(2,1) < 0$, abbiamo due autovalori negativi, la matrice è definita negativa e il punto $(1,2)$ di massimo locale.