

Complementi di Analisi Matematica

31 ottobre 2012

Esercizio 1 (8 punti)

Si calcolino il versore tangente, il versore normale, il versore binormale e la curvatura della curva regolare γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t \sin t, \cos t, t^2) \quad t \in [0, 2\pi]$$

nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$

Soluzione: Calcoliamo $\alpha'(\pi/2)$ e $\alpha''(\pi/2)$ e $\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)$:

$$\alpha'(t) = (\sin t + t \cos t, -\sin t, 2t), \quad \alpha''(t) = (2 \cos t - t \sin t, -\cos t, 2)$$

$$\alpha'(\pi/2) = (1, -1, \pi), \quad \alpha''(\pi/2) = (-\pi/2, 0, 2) \quad \alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2) = (-2, -2 - \pi^2/2, -\pi/2)$$

$$\|\alpha'(\pi/2)\| = \sqrt{2 + \pi^2}, \quad \|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\| = \frac{\sqrt{32 + \pi^4 + 9\pi^2}}{2}$$

Da cui possiamo dedurre che:

$$\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{\alpha'(\pi/2)}{\|\alpha'(\pi/2)\|} = \frac{1}{\sqrt{2 + \pi^2}}(1, -1, \pi)$$

$$\mathbf{B}(\pi/2) = \frac{\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)}{\|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\|} = \frac{2}{\sqrt{32 + \pi^4 + 9\pi^2}}(-2, -2 - \pi^2/2, -\pi/2)$$

$$\mathbf{N}(\pi/2) = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = \frac{2}{\sqrt{32 + \pi^4 + 9\pi^2} \sqrt{2 + \pi^2}}(-\pi^3/2 - 5\pi/2, 3\pi/2, 4 + \pi^2/2)$$

$$k(\pi/2) = \frac{\|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\|}{\|\alpha'(\pi/2)\|^3} = \frac{\sqrt{32 + \pi^4 + 9\pi^2}}{2(\sqrt{2 + \pi^2})^3}$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove \mathbf{F} è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (xy, y^2)$$

e γ è l'arco di parabola parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t, t^2), \quad t \in [-1, 1]$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (x(t)y(t), y(t)^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_{-1}^1 (t^3, t^4) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^3 + 2t^5) dt = 0\end{aligned}$$

Esercizio 3 (7 punti)

Si determinini un parametrizzazione per curva intersezione fra la superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = -x^2 + 2x + 2y^2 - 8y + 10$ nel punto $(1, 2, f(1, 2))$

Soluzione: L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = -x^2 + 2x + 2y^2 - 8y + 10$ nel punto $(1, 2, f(1, 2))$ è :

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial}{\partial x} f(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial}{\partial y} f(1, 2)(y - 2).$$

Dato che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= -2x + 2, & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 4y - 8, \\ \frac{\partial}{\partial x} f(1, 2) &= -2 + 2 = 0, & \frac{\partial}{\partial y} f(1, 2) &= 8 - 8 = 0,\end{aligned}$$

$$f(1, 2) = -1 + 2 + 8 - 16 + 10 = 3$$

l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = -x^2 + 2x + 2y^2 - 8y + 10$ nel punto $(1, 2, f(1, 2))$ è

$$z = 3$$

La curva intersezione fra il piano $z = 3$ e la superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{cases} z = 3 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

è una circonferenza di raggio 3 che giace sul piano $z = 3$, infatti le coordinate (x, y) dei punti della curva soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 9$. Può essere parametrizzata ad esempio da

$$\alpha(\theta) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 3), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 4 (8 punti)

Si determinino i punti stazionari in \mathbf{R}^3 di $f(x, y, z) = xy^2 - zx + 3yz + y^2$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Soluzione:

Cerchiamo i punti stazionari, ovvero i punti le cui coordinate (x, y, z) sono tali che $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Le derivate parziali della funzione f sono:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = y^2 - z, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 2xy + 3z + 2y, \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = -x + 3y.$$

Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y^2 - z = 0 \\ 2xy + 3z + 2y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

La prima e la terza equazione permettono di esplicitare la variabile z e la variabile x in funzione della variabile y :

$$\begin{cases} z = y^2 \\ 2xy + 3z + 2y = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione otteniamo $6y^2 + 3y^2 + 2y = 0$ che ha due soluzioni $y = 0$ e $y = -2/9$.

Otteniamo così due soluzioni: $(0, 0, 0)$ e $(-2/3, -2/9, 4/81)$.

calcoliamo ora la matrice Hessiana:

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -1 \\ 2y & 2x + 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Analizziamo prima il punto stazionario $(0, 0, 0)$ La matrice Hessiana in $(0, 0, 0)$ è :

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

per determinare il segno degli autovalori applichiamo il metodo dei minori nord-ovest.

$$A_1 = (0), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = Hf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) = 0$, $\det(A_3) = -2 < 0$. Dato che il determinante di $Hf(0, 0, 0)$ non è nullo, sicuramente tutti e tre gli autovalori sono diversi da 0. Se tutti e tre gli autovalori fossero positivi allora si avrebbe $\det(A_1) > 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) > 0$, mentre se tutti e tre gli autovalori fossero negativi allora si avrebbe $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) < 0$. Dato che non si verifica nessuna di queste due possibilità allora abbiamo autovalori di segno differente e $(0, 0, 0)$ è un punto di sella.

Analizziamo ora il punto stazionario $(-2/3, -2/9, 4/81)$ La matrice Hessiana in $(-2/3, -2/9, 4/81)$ è :

$$Hf(-2/3, -2/9, 4/81) = \begin{pmatrix} 0 & -4/9 & -1 \\ -4/9 & 2/3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

per determinare il segno degli autovalori applichiamo il metodo dei minori nord-ovest.

$$A_1 = (0), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4/9 \\ -4/9 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = Hf(-2/3, -2/9, 4/81) = \begin{pmatrix} 0 & -4/9 & -1 \\ -4/9 & 2/3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) = -16/81 < 0$, $\det(A_3) = 2 > 0$. Dato che il determinante di $Hf(-2/3, -2/9, 4/81)$ non è nullo, sicuramente tutti e tre gli autovalori sono diversi da 0. Se tutti e tre gli autovalori fossero positivi allora si avrebbe $\det(A_1) > 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) > 0$, mentre se tutti e tre gli autovalori fossero negativi allora si avrebbe $\det(A_1) < 0$, $\det(A_2) > 0$, $\det(A_3) < 0$. Dato che non si verifica nessuna di queste due possibilità allora abbiamo autovalori di segno differente e $(-2/3, -2/9, 4/81)$ è un punto di sella.