Complementi di Analisi Matematica

31 ottobre 2012

Esercizio 1 (8 punti)

Si calcolino il versore tangente, il versore normale, il versore binormale e la curvatura della curva regolare γ parametrizzata da

$$\alpha(t) = (\cos t, t\sin t, t^2), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

nel punto corrispondente al valore di $t = \pi/2$

Soluzione: Calcoliamo $\alpha'(\pi/2)$ e $\alpha''(\pi/2)$ e $\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)$:

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \sin t + t\cos t, 2t), \qquad \alpha''(t) = (-\cos t, 2\cos t - t\sin t, 2)$$

$$\alpha'(\pi/2) = (-1, 1, \pi), \qquad \alpha''(\pi/2) = (0, -\pi/2, 2) \qquad \alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2) = (2+\pi^2/2, 2, \pi/2)$$

$$\|\alpha'(\pi/2)\| = \sqrt{2+\pi^2}, \qquad \|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\| = \frac{\sqrt{32+\pi^4+9\pi^2}}{2}$$

Da cui possiamo dedurre che:

$$\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{\alpha'(\pi/2)}{\|\alpha'(\pi/2)\|} = \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}}(-1, 1, \pi)$$

$$\mathbf{B}(\pi/2) = \frac{\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)}{\|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\|} = \frac{2}{\sqrt{32+\pi^4+9\pi^2}}(2+\pi^2/2, 2, \pi/2)$$

$$\mathbf{N}(\pi/2) = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = \frac{2}{\sqrt{32+\pi^4+9\pi^2}\sqrt{2+\pi^2}}(3\pi/2, -\pi^3/2 - 5\pi/2, 4+\pi^2/2)$$

$$k(\pi/2) = \frac{\|\alpha'(\pi/2) \wedge \alpha''(\pi/2)\|}{\|\alpha'(\pi/2)\|^3} = \frac{\sqrt{32+\pi^4+9\pi^2}}{2(\sqrt{2+\pi^2})^3}$$

Esercizio 2 (7 punti)

Si calcoli l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove $\mathbf{F}$ è il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (xy, y^2)$$

e γ è l'arco di parabola parametrizzata da

$$\alpha(t) = (-t^2, t), \qquad t \in [-1, 1]$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\alpha(t)\cdot\alpha'(t)dt = \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(\alpha(t)\cdot\alpha'(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1}(x(t)y(t), y(t)^2)\cdot(-2t,1)dt = \int_{-1}^{1}(-t^3,t^2)\cdot(-2t,1)dt \\ &= \int_{-1}^{1}(2t^4+t^2)dt = 4/5+2/3 = 22/15\end{aligned}$$

Esercizio 3 (7 punti)

Si determinini un parametrizzazione per curva intersezione fra la superficie conica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = -x^2+4x+2y^2-4y+8$ nel punto $(2,1,f(2,1))$

Soluzione: L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = -x^2+4x+2y^2-4y+8$ nel punto $(2,1,f(2,1))$ è :

$$z = f(2,1) + \frac{\partial}{\partial x}f(2,1)(x-2) + \frac{\partial}{\partial y}f(2,1)(y-1).$$

Dato che:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = -2x+4, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 4y-4,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(2,1) = -4+4 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(2,1) = 4-4 = 0,$$

$$f(2,1) = -4+8+2-4+8 = 10$$

l'equazione del piano tangente è

$$z = 10$$

La curva intersezione fra il piano $z = 10$ e la superficie conica $z = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\begin{cases} z = 10 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

è una circonferenza di raggio 10 che giace sul piano $z = 10$, infatti le coordinate (x,y) dei punti della curva soddisfano l'equazione $x^2+y^2 = 100$. Può essere parametrizzata ad esempio da

$$\alpha(\theta) = (10\cos\theta, 10\sin\theta, 10), \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si determinino i punti stazionari in $\mathbf{R}^3$ di $f(x,y,z) = zx^2 - yz + 3xy + x^2$ e si stabilisca se sono di massimo relativo, minimo relativo o sella.

Soluzione:

Cerchiamo i punti stazionari, ovvero i punti le cui coordinate (x,y,z) sono tali che $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$. Le derivate parziali della funzione f sono:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = 2xz + 3y + 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = -z + 3x, \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = x^2 - y.$$

Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2xz + 3y + 2x = 0 \\ -z + 3x = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

La seconda e la terza equazione permettono di esplicitare la variabile z e la variabile y in funzione della variabile x:

$$\begin{cases} 2xz + 3y + 2x = 0 \\ z = 3x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo $6x^2 + 3x^2 + 2x = 0$ che ha due soluzioni $x = 0$ e $x = -2/9$.
Otteniamo cosìdue soluzioni: $(0,0,0)$ e $(-2/9, 4/81, -2/3)$.
calcoliamo ora la matrice Hessiana:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z+2 & 3 & 2x \\ 3 & 0 & -1 \\ 2x & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analizziamo prima il punto stazionario $(0,0,0)$ La matrice Hessiana in $(0,0,0)$ è :

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} +2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

per determinare il segno degli autovalori applichiamo il metodo dei minori nord-ovest.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} +2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $det(A_1) = 2 > 0$, $det(A_2) = -9 < 0$, $det(A_3) = -2 < 0$. Dato che il determinante di $Hf(0, 0, 0)$ non è nullo, sicuramente tutti e tre gli autovalori sono diversi da 0. Se tutti e tre gli autovalori fossero positivi allora si avrebbe $det(A_1) > 0$, $det(A_2) > 0$, $det(A_3) > 0$, mentre se tutti e tre gli autovalori fossero negativi allora si avrebbe $det(A_1) < 0$, $det(A_2) > 0$, $det(A_3) < 0$. Dato che non si verifica nessuna di queste due possibilità allora abbiamo autovalori di segno differente e $(0, 0, 0)$ è un punto di sella.

Analizziamo ora il punto stazionario $(-2/9, 4/81, -2/3)$. La matrice Hessiana in $(-2/9, 4/81, -2/3)$ è :

$$Hf(-2/9, 4/81, -2/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 3 & -4/9 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4/9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

per determinare il segno degli autovalori applichiamo il metodo dei minori nord-ovest.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = Hf(-2/9, 4/81, -2/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 3 & -4/9 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4/9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $det(A_1) = 2/3 > 0$, $det(A_2) = -9 < 0$, $det(A_3) = 2 > 0$. Dato che il determinante di $Hf(-2/9, 4/81, -2/3)$ non è nullo, sicuramente tutti e tre gli autovalori sono diversi da 0. Se tutti e tre gli autovalori fossero positivi allora si avrebbe $det(A_1) > 0$, $det(A_2) > 0$, $det(A_3) > 0$, mentre se tutti e tre gli autovalori fossero negativi allora si avrebbe $det(A_1) < 0$, $det(A_2) > 0$, $det(A_3) < 0$. Dato che non si verifica nessuna di queste due possibilità allora abbiamo autovalori di segno differente e $(-2/9, 4/81, -2/3)$ è un punto di sella.