Complementi di Analisi Matematica

4 febbraio 2014

Esercizio 1 (8 punti)

Calcolare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2+x-y^2+2y$ nel triangolo (pieno) di vertici (0,2), (1,0) e (-1,0).

Soluzione:

Dato che la funzione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ (infatti è un polinomio), cerchiamo i punti di massimo e minimo assoluto di f nel triangolo pieno T di vertici (0,2), (1,0) e (-1,0) tra:

1. i punti interni in cui $\nabla f = (0,0)$,
2. i punti del bordo.

1. Per quanto riguarda i punti interni in cui si annulla il gradiente, abbiamo che $\nabla f(x,y) = (2x+1, -2y+2)$, quindi l'unico punto in cui $\nabla f = (0,0)$ è $(-1/2, 1)$, che di fatto non è interno al triangolo, ma si trova sul bordo (sul segmento congiungente (-1,0) e (0,2)). La funzione in questo punto vale
$$f(-1/2, 1) = 3/4$$
2. Per quanto riguarda il bordo del triangolo T, questo è composto da 3 segmenti, che analizziamo separatamente.
   (a) Segmento congiungente (-1,0) e (1,0). Questo è formato dai punti del piano della forma $(x,0)$, con $x \in [-1,1]$. La funzione f ristretta a tali punti è $f(x,0) = x^2 + x$. Tale funzione della variabile x, ristretta all'intervallo $[-1,1]$, ha un punto di minimo in $x = -1/2$, dove $\frac{d}{dx} f(x,0) = 2x+1 = 0$. In tale punto abbiamo $f(-1/2, 0) = -1/4$. Negli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ abbiamo $f(-1,0) = 0$ e $f(1,0) = 2$.
   (b) Segmento congiungente (0.2) e (1,0). Questo è formato dai punti del piano della forma $(x, 2-2x)$, con $x \in [0,1]$. La funzione f ristretta a tali punti è $f(x, 2-2x) = -3x^2 + 5x$. Tale funzione della variabile x, ristretta all'intervallo $[0,1]$, ha un punto di massimo in $x = 5/6$, dove $\frac{d}{dx} f(x, 2-2x) = -6x+5 = 0$. In tale punto abbiamo $f(5/6, 1/3) = 25/12$. Negli estremi dell'intervallo $[0,1]$ abbiamo $f(0,2) = 0$ e $f(1,0) = 2$.

(c) Segmento congiungente (-1,0) e (0.2). Questo è formato dai punti del piano della forma $(x, 2+2x)$, con $x \in [-1, 0]$. La funzione f ristretta a tali punti è $f(x, 2+2x) = -3x^2 - 3x$. Tale funzione della variabile x, ristretta all'intervallo $[-1, 0]$, ha un punto di massimo in $x = -1/2$, dove $\frac{d}{dx} f(x, 2+2x) = -6x - 3 = 0$. In tale punto abbiamo $f(-1/2, 1) = 3/4$. Negli estremi dell'intervallo $[-1, 0]$ abbiamo $f(-1, 0) = 0$ e $f(0, 2) = 0$.

Concludendo, il punto di massimo assoluto di f nel triangolo T è (5/6, 1/3) in cui f vale 25/12, mentre il punto di minimo assoluto di f nel triangolo T è (-1/2,0) in cui f vale $-1/4$.

Esercizio 2 (8 punti)

Si calcoli l'integrale triplo $\int\int\int_\Omega f(x, y, z) dxdydz$, dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $f(x, y, z) = z$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x + z \leq 3, z - x \geq -2\}.$$

Soluzione: Integrando per fili abbiamo

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \int\int_D \int_{x-2}^{3-x} z \; dz \; dxdy = \int\int_D \frac{5-2x}{2} dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Per calcolare l'integrale doppio, dato che D è un cerchio di raggio 1 e centro $(1, 0)$, è conveniente introdurre le coordinate polari nel piano centrate in $(1, 0)$:

$$x = 1 + \rho \cos\theta, \quad t = \rho \sin\theta, \qquad \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

Abbiamo dunque

$$\int\int_D \frac{5-2x}{2} dxdy = \int_0^2 \pi \int_0^1 \frac{3 - 2\rho\cos\theta}{2} \rho \; d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Esercizio 3 (7 punti)

Si calcoli l'integrale di superficie $\int\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, dS$, dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e Σ è la superficie laterale di un cilindro:

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

orientata in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ punti verso l'esterno del cilindro.

Soluzione: Parametrizziamo la superficie Σ tramite:

$$r(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z), \qquad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 1].$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} r(\theta, z) = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0), \qquad \frac{\partial}{\partial z} r(\theta, z) = (0, 0, 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} r(\theta, z) \wedge \frac{\partial}{\partial z} r(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0).$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 F(r(\theta, z) \cdot N(\theta, z) d\theta dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\cos\theta, 2\sin\theta, z), \cdot (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0), d\theta dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4 d\theta dz = 8\pi
\end{aligned}$$

.

Esercizio 4 (7 punti)

Tre urne, numerate 1, 2 e 3 e inizialmente vuote, vengono riempite con n palline che vengono inserite, una dopo l'altra , in una delle urne, scelta a caso ogni volta.
Qual è la probabilità che l'urna 1 rimanga vuota?
Qual è la probabilità che le urne 1 e 2 rimangano vuote?
Qual è la probabilità che una qualunque delle urne rimanga vuota?

Soluzione: Numeriamo le palline con un indice $k = 1, ..., n$.
Dato che per ogni $k = 1, ..., n$ la probabilità che la k-esima pallina non venga inserita nell'urna 1 è 2/3 e che ogni operazione di inserimento è indipendente dalle altre, abbiamo che la probabilità che l'urna 1 rimanga vuota è $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Analogamente, per ogni $k = 1, ..., n$ la probabilità che la k-esima pallina non venga inserita né nell'urna 1 né nell'urna 2 è 1/3. Quindi la probabilità che le urne 1 e 2 rimangano vuote è $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Infine l'evento una qualunque delle urne rimane vuota può essere rappresentato come unione di tre eventi disgiunti: l'urna 1 rimane vuota, l'urna 2 rimane vuota, l'urna 3 rimane vuota. La probabilità di ognuno di questi eventi è $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, quindi la probabilità dell'evento unione è :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n-1}}.$$