Soluzioni scritto del 13 giugno 2014

Esercizio 1 Si consideri la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}, z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1\right\}$.

1. Fornire una parametrizzazione di Σ
2. La superficie è regolare? Motivare la risposta.
3. Orientando Σ in modo tale che il versore normale $\hat{n}$ soddisfi la relazione $\hat{n} \cdot e_z < 0$, calcolare il flusso attraverso Σ del campo vettoriale $F(x,y,z) = (-y, x, x)$.

Soluzione:

1. La superficie Σ è la parte del cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ che si trova al di sotto del piano di equazione $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$. Una possibile parametrizzazione di Σ è data dalla funzione $r : D \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$r(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \qquad (x,y) \in D,$$

dove $D \subset \mathbf{R}^2$ è il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ contenente i punti (x,y) che soddisfano la disequazione $\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$, cioé:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{(x-\sqrt{2})}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\}$$

Notiamo che D è un'ellisse di centro $(\sqrt{2}, 0)$ e semiassi $a = 2$ e $b = \sqrt{2}$.

2. Come anticipato sopra, Σ è la parte del cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ che si trova al di sotto del piano di equazione $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$. La superficie Σ quindi non è regolare in quanto nel punto (0,0,0) (il vertice del cono) non è definito il piano tangente.

3. Utilizzando la parametrizzazione ricavata al punto 1, otteniamo che il vettore normale $N(x,y)$ è dato da $N(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$. Per rispettare la parametrizzazione prescritta e soddisfare la diseguaglianza $\hat{n} \cdot e_z < 0$ dobbiamo utilizzare il vettore $\tilde{N}(x,y) = -N(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$. Il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie orientata Σ è quindi dato da:

$$\begin{aligned}\int\int_\Sigma F \cdot \hat{n} dS &= \int\int_D F(x,y) \cdot \tilde{N}(x,y) dxdy = \int\int_D (-y, x, x) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy \\ &= \int\int_D -x\, dxdy = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\sqrt{2} + 2\rho\cos\theta) 2\sqrt{2}\rho\, d\rho d\theta = -4\pi\end{aligned}$$

Nel calcolo dell'ultimo integrale sono state utilizzate le coordinate ellittiche $x = \sqrt{2} = 2\rho\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\rho\sin\theta$.

Esercizio 2

Si calcoli l'integrale doppio $\int\int_D f(x,y)dxdy$, dove $f(x,y) = x$ e $D \subset \mathbf{R}^2$ è la regione racchiusa dalla curva di equazione parametrica

$$(x(\theta), y(\theta)) = ((1-\cos\theta)\cos\theta, (1-\cos\theta)\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Soluzione:
Utilizzando le coordinate polari nel piano

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_0^{2\pi}(\int_0^{1-cos\theta}\rho^2\cos\theta d\rho)d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1-\cos\theta)^3\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\theta-3\cos^2\theta+3\cos^3\theta-\cos^4\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left(-3\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{5}{4}\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (7 punti)
Si consideri la curva $\gamma \subset \mathbf{R}^3$ di parametrizzazione $\alpha(t)=(t^2,1,2t)$, $t\in\mathbf{R}$, e la superficie $\Sigma\subset\mathbf{R}^3$ grafico della funzione $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definita da $f(x,y)=x^2y+y^3+2x$.
Si determini il punto della curva γ in cui la retta tangente è ortogonale ad uno dei piani tangenti alla superficie Σ.
Soluzione:
Dato un generico punto $\alpha(t)=(t^2,1,2t)$ della curva γ, il vettore tangente è dato da $\alpha'(t)=(2t,0,2)$.
Dato un generico punto (x,y) della superficie Σ, il vettore normale è dato da $N(x,y)=(-(2xy+2),-(x^2+3y^2),1)$.
La retta tangente a Γ in $\alpha(t)$ è ortogonale al piano tangente a Σ in (x,y) se esiste una costante $\lambda\in\mathbf{R}$, $\lambda\neq 0$, tale che $N(x,y)=\lambda\alpha'(t)$. Esplicitando tale condizione, cerchiamo le soluzioni del sistema di tre equazioni nelle 4 incognite t,x,y,λ:

$$\begin{cases} -(2xy+2)=\lambda 2t \\ -(x^2+3y^2)=0 \\ 1=2\lambda \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\lambda=1/2$, $x=0, y=0$, $t=-2$.
Il punto della curva cercato è dunque $\alpha(-2)=(4,1,-4)$.
Esercizio 4
Si calcoli il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z)=2+x+y+3z$ sull'insieme $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$.
Soluzione:
La funzione f è continua e l'insieme Ω è chiuso e limitato, quindi per il teorema di Weierstrass il problema ammette soluzione.
L'insieme Ω è la parte della superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ che si trova al di sopra del piano $z=0$. Per determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione f su Ω studiamo separatamente

1. La semisuperficie sferica $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$;
2. la circonferenza bordo di Σ, descritta dalle equazioni $z=0$, $x^2+y^2=0$.

1. Per quanto riguarda la semisuperficie sferica $x^2+y^2+z^2=1$, $z>0$, utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange. La semisuperficie può essere rappresentata come una parte dell'insieme di livello della funzione $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. Introducendo la Lagrangiana $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$, cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1=2\lambda x \\ 1=2\lambda y \\ 3=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

che soddisfino anche la condizione aggiuntiva $z > 0$. L'unica soluzione è $x = 1/\sqrt{11}$, $y = 1/\sqrt{11}$,$z = 3/\sqrt{11}$ dove $f(1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11}) = 2 + \sqrt{11}$.

2. La funzione f ristretta alla circonferenza descritta dalle equazioni $z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, diviene $f(x, y, 0) = 2 + x + y$. Studiamo tale funzione di due variabili sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$¿ Utilizzando nuovamente il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risolviamo il sistema di tre equazioni in tre incognite
$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$
Otteniamo due soluzioni: $x = y = \sqrt{2}/2$ e $x = y = -\sqrt{2}/2$. Nella prima soluzione la funzione f vale $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = 2+\sqrt{2}$, mentre nella seconda soluzione abbiamo $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) = 2 - \sqrt{2}$

Complessivamente il punto di minimo assoluto è $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ dove la funzione vale $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0) = 2 - \sqrt{2}$, mentre il punto di massimo assoluto è $(1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$ in cui la funzione vale $f(1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11}) = 2 + \sqrt{11}$.