Soluzioni scritto del 4 luglio 2016

Esercizio 1 Si calcoli l'integrale di volume $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz$, dove $f(x,y,z) = |x+y|$ e Ω è l'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y-x\}$$

Soluzione:
Utilizzando la tecnica di integrazione "per fili"

$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \int\int_D \left(\int_0^{y-x} |x+y|\right) dxdy \\ &= \int\int_D (y-x)|x+y|dxdy,\end{aligned}$$

dove $D \subset \mathbf{R}^2$ è l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y-x \geq 0\}$$

Esplicitando i valori di $|x+y|$ e utilizzando le coordinate polari nel piano otteniamo

$$\begin{aligned}\int\int_D (y-x)|x+y|dxdy &= \int\int_{D_1} (y-x)(x+y)dxdy - \int\int_{D_2} (y-x)(x+y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^3(\sin^2\theta - \cos^2\theta)d\theta d\rho - \int_0^1 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \rho^3(\sin^2\theta - \cos^2\theta)d\theta d\rho = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dove D_1 e D_2 sono i due sottoinsiemi di D definiti da

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y-x \geq 0, x+y \geq 0\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y-x \geq 0, x+y < 0\}.\end{aligned}$$

Esercizio 2
Si consideri la curva γ intersezione fra la superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ed il piano di equazione $x+z=1$.

1. Si fornisca una parametrizzazione di γ.
2. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $F(x,y,z) = (y,z,x)$ lungo la parte di curva γ che inizia nel punto $(1/2, 0, 1/2)$ e finisce nel punto $(0,1,1)$.

Soluzione:
In quanto appartenente sia alla superficie conica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sia al piano $x+z=1$, le componenti $x(t), y(t), z(t)$ di una generica parametrizzazione $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ della curva γ dovranno soddisfare entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} z(t) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \\ x(t)+z(t) = 1 \end{cases}$$

Mettendo a sistema le due equazioni e sostituendo nella prima equazione la relazione $z(t) = 1 - x(t)$ otteniamo la relazione $x(t) = \frac{1-y^2(t)}{2}$, che collega fra loro le coordinate x e y dei punti di γ. Ponendo $y(t) \equiv t$ otteniamo

$$\alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{2}, t, \frac{1+t^2}{2}\right), \qquad t \in \mathbf{R}$$

Se vogliamo descrivere solo il tratto di curva che collega i punti $(1/2, 0, 1/2)$ e $(0, 1, 1)$ dobbiamo restringere i valori del parametro t all'intervallo $[t_0, t_1]$, dove $\alpha(t_0) = (1/2, 0, 1/2)$ e $\alpha(t_1) = (0, 1, 1)$, cioé $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$. Per calcolare quindi il lavoro di F lungo γ impostiamo l'integrale:

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_0^1 \left(t, \frac{1+t^2}{2}, \frac{1-t^2}{2}\right) \cdot (-t, 1, t)dt = \frac{11}{24}$$

Esercizio 3

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ il campo vettoriale $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$:

$$F(x, y, z) = (2xe^{x^2} - \alpha y - zy\sin(xy), -zx\sin(xy) - 2x - 1, \cos(xy) + 2)$$

è conservativo. Per tale valore di α, calcolare un potenziale U e il lavoro di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t^2 \sin t, t^2 \cos t, t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Soluzione:

Dato che il campo vettoriale F è di classe C^1 su $\mathbf{R}^3$ che è un insieme semplicemente connesso, F è conservativo se e solo se è irrotazionale, cioé se e solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{cases}$$

Dove $F_1(x, y, z) = 2xe^{x^2} - \alpha y - zy\sin(xy)$, $F_2(x, y, z) = -zx\sin(xy) - 2x - 1$, $F_3(x, y, z) = \cos(xy) + 2$. imponiamo dunque

$$\begin{cases} -\alpha - z\sin(xy) - zyx\cos(xy) = -z\sin(xy) - zxy\cos(xy) - 2 \\ -y\sin(xy) = -y\sin(xy) \\ -x\sin(xy) = -x\sin(xy) \end{cases}$$

da cui deduciamo che $\alpha = 2$

Per calcolare il potenziale U del campo conservativo $F(x, y, z) = (2xe^{x^2} - 2y - zy\sin(xy), -zx\sin(xy) - 2x - 1, \cos(xy) + 2)$, cerchiamo una funzione $U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xe^{x^2} - 2y - zy\sin(xy) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -zx\sin(xy) - 2x - 1 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \cos(xy) + 2 \end{cases}$$

Imponendo che $\frac{\partial U}{\partial x} = 2xe^{x^2} - 2y - zy\sin(xy)$ otteniamo che il potenziale U deve essere della forma $U(x, y, z) = e^{x^2} - 2xy + z\cos(xy) + g(y, z)$.

Imponendo che $\frac{\partial U}{\partial y} = -zx\sin(xy) - 2x - 1$ otteniamo che $\frac{\partial}{\partial y} g(y, z) = -1$, quindi $g(y, z) = -y + h(z)$.

Imponendo che $\frac{\partial U}{\partial z} = \cos(xy) + 2$ otteniamo $h'(z) = 2$ e quindi $h(z) = 2z$.

Concludendo abbiamo

$$U(x, y, z) = e^{x^2} - 2xy + z\cos(xy) - y + 2z$$

Per calcolare il lavoro di F lungo γ, utilizziamo la formula

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(\alpha(\pi)) - U(\alpha(0)) = U(0, -\pi^2, \pi) - U(0, 0, 0) = 1 + \pi + \pi^2 + 2\pi - 1 = \pi^2 + 3\pi$$

Esercizio 4

Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di periodo $T = 2\pi$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ \sin x & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Calcolare inoltre la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Soluzione:

Calcoliamo i coefficienti a_n, b_n dello sviluppo in serie di Fourier di f.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(n+1)x}{2(n+1)}\Big|_0^{\pi} + \frac{-\cos(1-n)x}{2(1-n)}\Big|_0^{\pi}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ -\frac{2}{\pi(n^2-1)} & n \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

mentre per i coefficienti b_n abbiamo:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi, per la continuità di f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) + \sum_{n=2, n \text{ pari}}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\cos(nx) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2nx) \end{aligned}$$

In $x = 0$ otteniamo

$$0 = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}$$

Da cui $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.